Vorwort zur dritten Auflage

Die dritte Auflage stimmt bis einschließlich Kapitel 15 im wesentlichen mit der zweiten Auflage überein. Teil III wurde durch ein 20seitiges Kapitel über Kombinatorik ergänzt. Dadurch kam es auch zu Ergänzungen des Teils IV mit den Übungsaufgaben.
Zeitgleich erscheint beim Springer Verlag das

Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie

in der zweiten Auflage, in dem die Lösungen der Übungsaufgaben des vorliegenden Buches zu finden sind.

Dank der Hinweise von Leserinnen und Lesern konnte die Zahl der Druckfehler weiter reduziert werden.
Mein besonderer Dank gilt meinen Kollegen Dr. Walter Harnau, Prof. Achill Schürmann und den Diplommathematikern Matthias Böhm und Konrad Sperfeld, die dafür gesorgt haben, daß mein erster Entwurf für das Kombinatorik-Kapitel an einigen Stellen überarbeitet und Schreibfehler korrigiert wurden. Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kolleginnen Susann Dittmer und Heike Schubert, die mir bei der technischen Herstellung des Manuskript (z.B. bei Problemen mit Latex) schnell und effektiv geholfen haben.

Rostock, im Januar 2011 Dietlinde Lau

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch die Korrektur der inzwischen gefundenen Druckfehler, einigen Umformulierungen sowie Ergänzungen zum Kapitel 1 und den Kapiteln des Teils IV, in dem die Übungsaufgaben zu den Kapiteln I–III zu finden sind.
Dem Wunsch einiger Leser folgend, habe ich in Ergänzung zum vorliegenden Buch ein Buch mit den Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Teil IV geschrieben, das zeitgleich mit der vorliegenden zweiten Auflage beim Springer-Verlag unter dem Titel

Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie

erscheint.
Sehr hilfreich beim Überarbeiten der ersten Fassung des vorliegenden Buches waren die Hinweise von Herrn Prof. Dr. L. Berg (Rostock). Besonders dankbar bin ich Herrn Dr. W. Harnau (Dresden), der in den letzten Monaten das gesamte Buch durchgearbeitet hat und dessen Änderungsvorschläge ich fast alle beim Überarbeiten des Buches umgesetzt habe.
Mein Dank gilt natürlich auch allen Lesern, die mir ihre Meinung zur ersten Auflage geschrieben haben und denen ich ebenfalls Hinweise auf Druckfehler und Änderungsvorschläge verdanke.

Rostock, im Juni 2007 — Dietlinde Lau

Vorwort zur ersten Auflage

> *„Soll ich mich im allgemeinen Sinne über Pädagogik äußern, so will ich folgende Betrachtung vorausschicken: Man kann das pädagogische Problem mathematisch formulieren, indem man die individuellen Qualitäten des Lehrers und seiner n Schüler als ebensoviele Unbekannte einführt und verlangt, eine Funktion von $(n + 1)$ Variablen $F(x_0, \ldots, x_n)$ unter gegebenen Nebenbedingungen zu einem Maximum zu machen. Ließe sich dieses Problem eines Tages entsprechend den bisher realisierten Fortschritten der psychologischen Wissenschaft direkt mathematisch behandeln, so wäre die (praktische) Pädagogik von da ab eine Wissenschaft, — solange das aber nicht der Fall ist, muß sie als Kunst gelten."*
> *(F. Klein (1849 – 1926) in seinem Vortrag: „Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an Universitäten")*

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die die Autorin für Physik-, Mathematik- und insbesondere Informatikstudenten zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie bzw. im Rahmen eines Grundkurses Mathematik für die Informatikstudenten an der Universität Rostock gehalten hat.

Eingedenk der Probleme, die insbesondere viele Studienanfänger mit dem Fach Mathematik als solches, der Umstellung von der Schulvermittlung des Fachs Mathematik zum (komprimierten) Vorlesungsstil an den Universitäten haben und wegen des Heranführens an die Beweistechniken der Mathematik, wird versucht, die wichtigsten Beweise sehr ausführlich darzustellen und sie durch Beispiele vor- und nachzubereiten. Wert wird außerdem darauf gelegt, Teile der Schulmathematik zu wiederholen und zu ergänzen.

Anliegen des Buches ist es auch, diejenigen Teile des Vorlesungsstoffes, die aus Zeitgründen sehr kurz behandelt werden müssen, zu ergänzen.

Besonders wichtige Teile (meist gewisse Sätze) der einzelnen Kapitel sind schattiert, und Teile, die beim ersten Lesen übergangen werden können bzw. zu den zwar wichtigen, aber in Vorlesungen meist nicht angegebenen Teilen des hier vermittelten Stoffes gehören, sind im Kleindruck angegeben.
Um möglichst eng an der Vorlesungsvermittlung des Stoffes zu sein, sind Definitionen und Sätze unter Verwendung von (platzsparenden) Symbolen — meist aus der mathematischen Logik — formuliert, die eingangs des ersten Kapitels erläutert werden. Für besonders oft auftretende Begriffe werden außerdem — wie in der Vorlesung — Abkürzungen[1] eingeführt.
Es sei darauf verwiesen, daß einzelne Kapitel auch unabhängig von den anderen Kapiteln lesbar sind, so daß man nicht gezwungen ist, zum Verständnis z.B. von Kapitel 3 die beiden vorherigen zu lesen. Die einzelnen Kapitel sind numeriert und sind wiederum in einzelne — mit einer neuen Zählung beginnende — Abschnitte untergliedert. Sätze und Lemmata aus Kapitel x, Abschnitt y, werden in der Form $x.y.i$ fortlaufend numeriert. Das Ende eines Beweises wird durch ■ kenntlich gemacht.
Die Abkürzung ÜA steht für *Übungsaufgabe.* Da sich bekanntlich das Verständnis für Mathematik über das Bearbeiten von Aufgaben vertiefen läßt, sind nicht nur im nachfolgenden Text eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben, sondern zu jedem der Kapitel 1 – 15 findet man in den *Kapiteln 16 – 18* eine Zusammenstellung von Übungsaufgaben, anhand der die Leser testen können, ob sie den behandelten Stoff verstanden haben und ob sie ihn auch anwenden können. Die Anzahl der Aufgaben ist so gewählt, daß genügend Aufgaben für die zur Vorlesung gehörenden wöchentlichen Übungen und Hausaufgaben sowie für das Selbststudium vorhanden sind.

Zum Inhalt:

Kapitel 1 beginnt mit einer Zusammenstellung von mathematischen Begriffen (wie z.B. die Begriffe: *Menge, Relation, Korrespondenz, Abbildung, Operation, Graph, ...*), die in späteren Kapiteln, aber auch in vielen hier nicht behandelten Gebieten der Mathematik zu den Grundbegriffen gehören.
Dem Anfänger wird erfahrungsgemäß die „Abstraktheit" dieser Begriffe etwas zu schaffen machen, jedoch ist es — eine langjährige Erfahrung — nur eine Frage der Zeit und der Übung, bis man sich daran gewöhnt hat bzw. man es lernt, den Nutzen dieser Begriffsbildungen zu erkennen. Den Lesern sei gerade für dieses Kapitel die Bearbeitung der Übungsaufgaben aus 16.1 empfohlen, um sich möglichst schnell diesen Begriffsapparat über die Anwendungen zu erschließen.

Kapitel 2 führt kurz in die — für die Entwicklung der Mathematik der letzten zwei Jahrhunderte sehr wichtige — Denkweise, nämlich der in „algebraischen Strukturen", ein. Behandelt werden einige Grundlagen aus der Theorie der

[1] Eine Liste der verwendeten Symbole und Abkürzungen sowie Hinweise, auf welcher Seite sie eingeführt wurden, findet man ab S. 497.

Halbgruppen, Gruppen, Ringe, Körper, Verbände und *Booleschen Algebren.* Sie dienen außerdem als erste Vorbereitung auf Methoden und Denkweisen in der Theoretischen Informatik. Eine Fortsetzung findet dieses Kapitel im Teil III von Band 2, wo u.a. auch weitere Eigenschaften von Körpern hergeleitet werden und Anwendungen der Körpertheorie (z.B. in der Codierungstheorie) gezeigt werden.

Der in den *Kapiteln 3 – 11* behandelte Stoff wird allgemein zur sogenannten *Linearen Algebra und analytischen Geometrie* gerechnet und ist nach soviel „Abstrakten“ in den ersten beiden Kapiteln eine Art „Erholung“. Anwendungen dieser Teile der Mathematik sind entweder sofort oder leichter erkennbar. Da ein erster Schwerpunkt unserer Überlegungen *Lösungsmethoden und Lösbarkeitskriterien für beliebige lineare Gleichungssysteme* sind, werden im *Kapitel 3* zunächst Hilfsmittel dazu — nämlich die *Determinanten und Matrizen* — vorgestellt und ihre Eigenschaften ermittelt. Die anschließende Untersuchung der linearen Gleichungssysteme ist dann sehr einfach und — spart man einmal den rein numerischen Aspekt (wie Rundungsfehler u.ä.) bei der Behandlung von Gleichungssystemen aus, mit denen wir uns später befassen werden — für die nachfolgenden Kapitel ausreichend behandelt. Es sei hier bereits darauf verwiesen, daß die Matrizen und Determinanten auch Anwendungen haben, die weit über die hier behandelten hinausgehen.

Mit den im *Kapitel 4* eingeführten *Vektorraumbegriff* wird einer der grundlegenden und Verbindungen schaffender Begriff aus der Algebra, Analysis, Geometrie und mathematischen Physik behandelt. So lassen sich z.B. die Anschauungsebene bzw. der Anschauungsraum, in denen man Geometrie betreiben kann, mit Hilfe des Vektorraumbegriffs einheitlich beschreiben und zu sogenannten *affinen Punkträumen* verallgemeinern, was im *Kapitel 5* gezeigt wird. Wir beginnen in diesem Abschnitt auch mit der Wiederholung geometrischer Grundaufgaben.

Besonders wichtig und interessant sind *Vektorräume mit Skalarprodukt*, die im Mittelpunkt des *Kapitels 6* stehen.
Auch hier soll die Leistungsfähigkeit der neuen Begriffen zunächst anhand von Anwendungen in der Geometrie — genauer bei der Behandlung der *euklidischen* und *unitären affinen Punkträume* — im *Kapitel 7* erläutert werden.

In Vorbereitung auf Kapitel 9 behandeln wir im *Kapitel 8* die sogenannten *Eigenwerte, Eigenvektoren* und *Normalformen von Matrizen.* Auch hier behandeln wir Begriffe und Sätze, die nicht nur in der Linearen Algebra eine Rolle spielen. Es sei hier schon angemerkt, daß für das Verständnis von Kapitel 9 nur die Aussagen über die Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von symmetrische Matrizen aus Kapitel 8 benötigt werden. Die Ergebnisse über Normalformen für beliebige Matrizen (u.a. die Jordansche Normalform) werden im Kapitel 10 verwendet.

Im *Kapitel 9* geht es u.a. um die Frage, welche geometrischen Objekte durch Gleichungen, in denen (grob gesagt) die Variablen höchstens im Quadrat vorkommen, beschrieben werden können. Das hierbei entwickelte Verfahren — die sogenannte *Hauptachsentransformation* — wird es uns ermöglichen, ausgehend von gewissen Gleichungen, die Bedingungen für die Koordinaten gewisser geometrischer Objekte angeben — durch reines Rechnen — Lage und Typ dieser Objekte zu erfassen. Eingesetzt werden dabei auch viele in vorherigen Kapitel eingeführten Hilfsmittel (wie z.B. die Matrizen), durch die unsere durchzuführenden Überlegungen und Rechnungen erst übersichtlich und durchschaubarer werden.

Mit den Kapiteln 3 – 9 (mit Ausnahme gewisser Aussagen über Normalformen von Matrizen) haben wir einen gewissen Grundstandard, den man auch in vielen anderen Büchern über Lineare Algebra und analytischer Geometrie findet, behandelt.
Um den Leser den Einstieg in weiterführende Literatur[2] zu ermöglichen, sind in den *Kapiteln 10 und 11* Begriffe und Sätze zusammengestellt, die in meist für Mathematiker geschriebenen Büchern viel früher eingeführt werden, um den hier in den Kapitel 3 – 9 behandelten Stoff allgemeiner zu erarbeiten. Konkret geht es im *Kapitel 10* um Eigenschaften sogenannter *lineare Abbildungen* zwischen Vektorräumen und im *Kapitel 11* um Eigenschaften *affiner Abbildungen* zwischen Punkträumen. Da in der Vorlesung meist nicht viel Zeit ist, den Inhalt von Kapitel 10 und 11 sowie den von gewissen Teilen von Kapitel 8 ausführlich zu behandeln, seien diese Kapitel den Lesern insbesondere für das Selbststudium empfohlen.

Der Inhalt der *Kapitel 12 – 14* wird üblicherweise der *Numerischen Mathematik* zugeordnet. Unter Numerischer Mathematik bzw. unter *Numerik* versteht man diejenigen Teile der Mathematik, in denen mathematische Größen aus gegebenen Zahlen auch zahlenmäßig berechnet werden. Insbesondere beschäftigt sich die Numerik mit dem Aufstellen von Rechenvorschriften, nach denen aus Eingangsdaten, die oft mit (bekannten) Fehlern behaftet sind, die gewünschten Ausgangsdaten mit abschätzbarer Genauigkeit berechnet werden. Die Numerik setzt in der Regel dort ein, wo ein Problem (z.B. der Algebra oder Analysis) als gelöst angesehen werden kann, weil z.B. die Existenz einer Lösung nachgewiesen oder ein Lösungsalgorithmus (möglicherweise aus unendlich vielen Schritten bestehend) gefunden wurde. Bei der konkreten Ermittlung der Lösung eines Problems ergeben sich dann aber eine Reihe von Schwierigkeiten, die numerische Verfahren erfordern. Welche Schwierigkeiten dies sind und welche Lösungsansätze es zum Beheben dieser Schwierigkeiten gibt, wird im *Kapitel 12* erläutert.

Im *Kapitel 13* geht es um Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen. Grundlage fast aller angegebenen Verfahren ist dabei der sogenannte *Banachsche Fixpunktsatz*.

[2] Damit ist nicht nur Literatur zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie, sondern auch Literatur zur Funktionalanalysis gemeint.

Kapitel 14 setzt unsere Untersuchungen zu linearen Gleichungssystemen (kurz: LGS), die jeweils nur genau eine Lösung besitzen, fort. Es wird erläutert, warum für LGS mit sogenannter *schlechter Kondition* unsere Lösungsverfahren aus Kapitel 3 beim praktischen Rechnen (auf dem Computer oder per Hand) i.w. unbrauchbar sind und Näherungsverfahren für das Lösen solcher LGS entwickelt, die nicht nur für schlecht konditionierte LGS geeignet sind.

Im kurzen *Kapitel 15* über *Interpolation* wird (unter Verwendung von zwei Ergebnissen aus Kapitel 3) das Interpolationsproblem mit Polynomen gelöst. Anwenden lassen sich die hierbei erzielten Resultate z.B. bei der numerischen Integration.

Die in den Kapiteln 13 – 15 vorgestellten Verfahren gehören bereits zur angewandten Mathematik. Mehr über die Anwendungen der in diesem Band zusammengestellten mathematischen Gebiete sowie eine Fortsetzung der Theorie findet der Leser dann im *Band 2*, der aus den Teilen

- Lineare Optimierung
- Graphen und Algorithmen
- Algebraische Strukturen und Allgemeine Algebra mit Anwendungen

besteht.
Große Teile der im Band 2 behandelten Gebiete rechnet man zur sogenannten **Diskreten Mathematik**. Das Wort „diskret“ steht hierbei natürlich nicht für „verschwiegen“ oder „unauffällig“, sondern charakterisiert Teilbereiche der Mathematik, die sich vorrangig mit endlichen Mengen beschäftigen. Dies geschieht zwar in fast jedem Teilbereich der Mathematik, jedoch hat die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung dazu geführt, daß früher (wegen des großen „Rechenaufwandes“) nicht praktikable Algorithmen inzwischen ihre Anwendungen und Verbesserungen erfahren haben. Seit einigen Jahren ist es deshalb üblich, Gebiete der Mathematik, die gewisse Anwendungen in der Informatik besitzen oder die sich durch den enormen Aufschwung der elektronischen Datenverarbeitung entwickelten, unter dem Oberbegriff „Diskrete Mathematik“ zusammenzufassen. Inzwischen ist die Diskrete Mathematik mit ihren Kernbereichen *Kombinatorik, Graphentheorie, Algorithmentheorie, Optimierung und Theorie der diskreten Strukturen* eine Grundlagenwissenschaft für Mathematiker und Informatiker. Anliegen von Band 2 wird es sein – aufbauend auf Band 1 – für ausgewählte Gebiete der Diskreten Mathematik dies nachzuweisen. Insbesondere soll gezeigt werden, wie effektiv sich der vorher behandelte „mathematische Apparat“ beim Lösen der verschiedensten — insbesondere auch praktischen — Aufgaben einsetzen läßt.

Nicht versäumen möchte ich es, mich bei Herrn Dipl.-Math. Hans-Christian Pahlig zu bedanken, der die erste LaTeX–Fassung des vorliegenden Buches aus einer — von der Verfasserin von einigen Jahren auf dem PC 1715 geschriebenen — alten Computervariante entwickelt hat, wobei insbesondere von ihm sämtliche Zeichnungen neu entworfen und programmiert wurden.

Meinen Rostocker Kollegen Herrn Prof. Dr. R. Knörr, Herrn Dr. F. Leitenberger und Frau Dr. K. Mahrhold gilt mein Dank für die kritische Durchsicht einzelner Kapitel und einiger Änderungs- und Ergänzungsvorschläge.

Bei den Mitarbeitern des Springer-Verlages möchte ich mich für die sehr angenehme Zusammenarbeit bedanken.

Rostock, im November 2003 Dietlinde Lau