

Inhalt

Einleitung	13
1 Fehlertheorie	15
1.1 Fehlerarten	15
1.2 Zahldarstellung	16
1.3 Rundungsfehler	18
1.4 Differenzielle Fehleranalyse	21
1.5 Ergänzungen und Beispiele	24
1.6 Software	27
1.7 Aufgaben	28
2 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden	30
2.1 Der Gauß-Algorithmus	30
2.1.1 Elimination, Dreieckszerlegung und Determinantenberechnung	30
2.1.2 Pivotstrategien	38
2.1.3 Ergänzungen	43
2.2 Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen	47
2.2.1 Normen	47
2.2.2 Fehlerabschätzungen, Kondition	52
2.3 Systeme mit speziellen Eigenschaften	56
2.3.1 Symmetrische, positiv definite Systeme	56
2.3.2 Bandleitungen	62
2.3.3 Tridiagonale Gleichungssysteme	64
2.4 Verfahren für Vektorrechner und Parallelrechner	67
2.4.1 Voll besetzte Systeme	68
2.4.2 Tridiagonale Gleichungssysteme	73
2.5 Anwendungen	82
2.6 Software	87
2.7 Aufgaben	88

3	Interpolation und Approximation	91
3.1	Polynominterpolation	92
3.1.1	Problemstellung	92
3.1.2	Lagrange-Interpolation	95
3.1.3	Newton-Interpolation	95
3.1.4	Hermite-Interpolation	98
3.1.5	Inverse Interpolation	100
3.1.6	Anwendung: Numerische Differenziation	101
3.2	Splines	106
3.2.1	Kubische Splines	107
3.2.2	B-Splines 1. Grades	112
3.2.3	Kubische B-Splines	114
3.3	Zweidimensionale Splineverfahren	119
3.3.1	Bilineare Tensorsplines	120
3.3.2	Bikubische Tensorsplines	123
3.4	Kurveninterpolation	125
3.5	Kurven und Flächen mit Bézier-Polynomen	127
3.5.1	Bernstein-Polynome	127
3.5.2	Bézier-Darstellung eines Polynoms	129
3.5.3	Der Casteljau-Algorithmus	130
3.5.4	Bézier-Kurven	131
3.5.5	Bézier-Flächen	137
3.6	Gauß-Approximation	140
3.6.1	Diskrete Gauß-Approximation	142
3.6.2	Kontinuierliche Gauß-Approximation	144
3.7	Trigonometrische Approximation	145
3.7.1	Fourier-Reihen	145
3.7.2	Effiziente Berechnung der Fourier-Koeffizienten	154
3.8	Orthogonale Polynome	161
3.8.1	Approximation mit Tschebyscheff-Polynomen	162
3.8.2	Interpolation mit Tschebyscheff-Polynomen	170
3.8.3	Die Legendre-Polynome	174
3.9	Software	179
3.10	Aufgaben	179
4	Nichtlineare Gleichungen	183
4.1	Theoretische Grundlagen	183
4.1.1	Problemstellung	183
4.1.2	Konvergenztheorie und Banachscher Fixpunktsatz	185
4.1.3	Stabilität und Kondition	189

4.2	Gleichungen in einer Unbekannten	190
4.2.1	Das Verfahren der Bisektion	190
4.2.2	Das Verfahren von Newton	192
4.2.3	Die Sekantenmethode	195
4.2.4	Brents Black-box-Methode	196
4.3	Gleichungen in mehreren Unbekannten	199
4.3.1	Fixpunktiteration und Konvergenz	199
4.3.2	Das Verfahren von Newton	200
4.4	Nullstellen von Polynomen	207
4.4.1	Reelle Nullstellen: Das Verfahren von Newton-Machly	207
4.4.2	Komplexe Nullstellen: Das Verfahren von Bairstow	211
4.5	Software	215
4.6	Aufgaben	215
5	Eigenwertprobleme	218
5.1	Theoretische Grundlagen	219
5.1.1	Das charakteristische Polynom	219
5.1.2	Ähnlichkeitstransformationen	219
5.1.3	Symmetrische Eigenwertprobleme	220
5.1.4	Elementare Rotationsmatrizen	220
5.2	Das klassische Jacobi-Verfahren	222
5.3	Die Vektoriteration	229
5.3.1	Die einfache Vektoriteration nach von Mises	229
5.3.2	Die inverse Vektoriteration	231
5.4	Transformationsmethoden	232
5.4.1	Transformation auf Hessenberg-Form	233
5.4.2	Transformation auf tridiagonale Form	237
5.4.3	Schnelle Givens-Transformation	239
5.5	<i>QR</i> -Algorithmus	243
5.5.1	Grundlagen zur <i>QR</i> -Transformation	243
5.5.2	Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte	248
5.5.3	<i>QR</i> -Doppelschritt, komplexe Eigenwerte	253
5.5.4	<i>QR</i> -Algorithmus für tridiagonale Matrizen	256
5.5.5	Zur Berechnung der Eigenvektoren	260
5.6	Das allgemeine Eigenwertproblem	261
5.6.1	Der symmetrisch positiv definite Fall	261
5.7	Eigenwertschranken, Kondition, Stabilität	264
5.8	Anwendung: Membranschwingungen	268
5.9	Software	270
5.10	Aufgaben	271

6	Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate	274
6.1	Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen	274
6.2	Methoden der Orthogonaltransformation	278
6.2.1	Givens-Transformation	279
6.2.2	Spezielle Rechentechniken	284
6.2.3	Householder-Transformation	286
6.3	Singulärwertzerlegung	292
6.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	296
6.4.1	Gauß-Newton-Methode	297
6.4.2	Minimierungsverfahren	300
6.5	Software	304
6.6	Aufgaben	305
7	Numerische Integration	307
7.1	Newton-Cotes-Formeln	308
7.1.1	Konstruktion von Newton-Cotes-Formeln	308
7.1.2	Verfeinerung der Trapezregel	310
7.2	Romberg-Integration	313
7.3	Transformationsmethoden	315
7.3.1	Periodische Integranden	316
7.3.2	Integrale über \mathbb{R}	318
7.3.3	Variablensubstitution	320
7.4	Gauß-Integration	323
7.4.1	Eingebettete Gauß-Regeln	331
7.5	Adaptive Integration	332
7.6	Mehrdimensionale Integration	336
7.6.1	Produktintegration	336
7.6.2	Integration über Standardgebiete	337
7.7	Software	338
7.8	Aufgaben	339
8	Anfangswertprobleme	342
8.1	Einführung	343
8.1.1	Problemklasse und theoretische Grundlagen	343
8.1.2	Möglichkeiten numerischer Lösung	345
8.2	Einschrittverfahren	350
8.2.1	Konsistenz	350
8.2.2	Runge-Kutta-Verfahren	353
8.2.3	Explizite Runge-Kutta-Verfahren	354

Inhalt		11
8.2.4	Halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren	358
8.2.5	Schrittweitensteuerung	359
8.3	Mehrschrittverfahren	363
8.3.1	Verfahren vom Adams-Typ	363
8.3.2	Konvergenztheorie und Verfahrenskonstruktion	368
8.4	Stabilität	376
8.4.1	Inhärente Instabilität	376
8.4.2	Absolute Stabilität bei Einschrittverfahren	378
8.4.3	Absolute Stabilität bei Mehrschrittverfahren	380
8.4.4	Steife Differenzialgleichungen	384
8.5	Anwendung: Lotka-Volterras Wettbewerbsmodell	388
8.6	Software	391
8.7	Aufgaben	392
9	Rand- und Eigenwertprobleme	395
9.1	Problemstellung und Beispiele	395
9.2	Lineare Randwertaufgaben	399
9.2.1	Allgemeine Lösung	399
9.2.2	Analytische Methoden	401
9.2.3	Analytische Methoden mit Funktionenansätzen	404
9.3	Schießverfahren	408
9.3.1	Das Einfach-Schießverfahren	408
9.3.2	Das Mehrfach-Schießverfahren	413
9.4	Differenzenverfahren	418
9.4.1	Dividierte Differenzen	418
9.4.2	Diskretisierung der Randwertaufgabe	419
9.5	Software	424
9.6	Aufgaben	425
10	Partielle Differenzialgleichungen	427
10.1	Differenzenverfahren	427
10.1.1	Problemstellung	427
10.1.2	Diskretisierung der Aufgabe	429
10.1.3	Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen	434
10.1.4	Diskretisierungsfehler	444
10.1.5	Ergänzungen	446
10.2	Parabolische Anfangsrandwertaufgaben	448
10.2.1	Eindimensionale Probleme, explizite Methode	448
10.2.2	Eindimensionale Probleme, implizite Methode	454
10.2.3	Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten	459

	Inhalt
12	
10.2.4	Zweidimensionale Probleme 461
10.3	Methode der finiten Elemente 466
10.3.1	Grundlagen 466
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente 469
10.3.3	Elementweise Bearbeitung 471
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen 477
10.3.5	Beispiele 477
10.4	Software 482
10.5	Aufgaben 483
11	Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren 487
11.1	Diskretisierung partieller Differenzialgleichungen 487
11.2	Relaxationsverfahren 489
11.2.1	Konstruktion der Iterationsverfahren 489
11.2.2	Einige Konvergenzsätze 494
11.2.3	Optimaler Relaxationsparameter und Konvergenzgeschwindigkeit 505
11.3	Mehrgittermethoden 508
11.3.1	Ein eindimensionales Modellproblem 508
11.3.2	Eigenschaften der gedämpften Jacobi-Iteration 509
11.3.3	Ideen für ein Zweigitterverfahren 511
11.3.4	Eine eindimensionale Zweigittermethode 513
11.3.5	Eine erste Mehrgittermethode 517
11.3.6	Die Mehrgitter-Operatoren für das zweidimensionale Modellproblem 520
11.3.7	Vollständige Mehrgitterzyklen 522
11.3.8	Komplexität 523
11.3.9	Ein Hauch Theorie 524
11.4	Methode der konjugierten Gradienten 530
11.4.1	Herleitung des Algorithmus 530
11.4.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten 534
11.4.3	Konvergenzabschätzung 538
11.4.4	Vorkonditionierung 541
11.5	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen 547
11.5.1	Grundlagen des Verfahrens 548
11.5.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften 551
11.6	Speicherung schwach besetzter Matrizen 556
11.7	Software 559
11.8	Aufgaben 559
	Literaturverzeichnis 563
	Sachverzeichnis 576