

Heinz Schumann

# Elementare Tetraedergeometrie

## Eine Einführung in die Raumgeometrie

0.	<b>Einleitung</b> .....	1
1.	<b>Besondere Tetraeder</b> .....	11
1.1.	<b>Das gleichkante oder regelmäßige Tetraeder</b> .....	13
1.1.1.	Konstruktionen des regelmäßigen Tetraeders.....	13
1.1.2.	Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders.....	17
1.1.3.	Besondere Geraden und Punkte des regelmäßigen Tetraeders.....	19
1.1.4.	Berechnungen am regelmäßigen Tetraeder.....	20
1.1.5.	Sätze über das regelmäßige Tetraeder.....	22
1.1.6.	Lückenhafte Raumfüllung mit regelmäßigen Tetraedern.....	26
1.2.	<b>Gleichseitige Tetraeder</b> .....	29
1.2.1.	Eine erste Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und erste Aussagen.....	29
1.2.2.	Eine zweite Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und weitere Aussagen..	38
1.2.3.	Einige weitere Kennzeichnungen gleichseitiger Tetraeder.....	43
1.2.4.	Berechnungen am gleichseitigen Tetraeder.....	46
1.2.5.	Die besonderen Kugeln gleichseitiger Tetraeder.....	48
1.2.6.	Das Höhen-Hyperboloid gleichseitiger Tetraeder.....	48
1.3.	<b>Rechtwinklige Tetraeder</b> .....	63
1.3.1.	Konstruktionen rechtwinkliger Tetraeder.....	63
1.3.2.	Berechnungen an rechtwinkligen Tetraedern.....	69
1.3.3.	Räumliche Analogisierung des Pythagoras-Satzes.....	74
1.3.4.	Tetraeder mit „Pythagoras-Eigenschaft“.....	79
1.3.5.	Einige Ungleichungen an rechtwinkligen Tetraedern.....	87
1.4.	<b>„Rechteckige“ Tetraeder</b> .....	91
1.4.1.	Existenz und Eigenschaften rechteckiger Tetraeder.....	91
1.4.2.	Weitere Konstruktionen rechteckiger Tetraeder.....	93
1.4.3.	Berechnungen am rechteckigen Tetraeder.....	94
1.4.4.	Symmetrische rechteckige Tetraeder.....	99
2.	<b>Das allgemeine Tetraeder</b> .....	101
2.1.	<b>Tetraeder-Klassifikationen</b> .....	103
2.1.1.	Klassifikation nach Symmetrie-Eigenschaften.....	103
2.1.2.	Klassifikation nach Kantengleichheit.....	121
2.1.3.	Klassifikation nach Innenwinkeln der Seitendreiecke.....	125
2.1.4.	Klassifikation nach Winkeln zwischen zwei Seitendreiecken.....	130
2.1.5.	Abschließende Bemerkung zu den Klassifikationen nach Winkeln.....	136
2.2.	<b>Winkelmessungen am Tetraeder</b> .....	139
2.2.1.	Die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders.....	139
2.2.2.	Abschätzung der Flächenwinkel-Summe eines Tetraeders.....	139
2.2.3.	Abschätzung der Raumwinkel-Summe eines Tetraeders.....	143

III

2.3.	<b>Tetraederkonstruktionen</b>	149
2.3.1.	Tetraederkonstruktionen aus Seitendreiecken und Flächenwinkeln	149
2.3.2.	Kongruenzsätze für Tetraeder mittels Seitendreiecken und Flächenwinkel	155
2.3.3.	Tetraederkonstruktionen aus Kanten und Kantenwinkeln	156
2.3.4.	Konstruktionen ähnlicher Tetraeder aus Kantenwinkeln	160
2.3.5.	Ähnlichkeitssätze über Tetraeder mittels Flächen- und Kantenwinkel	166
2.4.	<b>Die Umkugel des Tetraeders</b>	169
2.4.1.	Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksfläche	169
2.4.2.	Konstruktion der Umkugel des Tetraeders	171
2.4.3.	Zur Lage des Umkugelmittelpunkts	173
2.4.4.	Der Umkugelradius als Term aus den Kantenlängen	175
2.4.5.	Eine analytische Berechnung der Lage des Umkugelmittelpunkts	183
2.5.	<b>Die Inkugel des Tetraeders</b>	187
2.5.1.	Abstandsgleiche Halbebenen	187
2.5.2.	Kanten- und Flächenabstandsgleiche einer dreikantigen Ecke	188
2.5.3.	Konstruktion der Inkugel des Tetraeders	192
2.5.4.	Analogien zwischen Um- und Inkreisen und Um- und Inkugeln	195
2.5.5.	Der Inkugelradius des Tetraeders	198
2.5.6.	Eine Beziehung zwischen In- und Umkugelradius des Tetraeders	198
2.5.7.	Tetraeder-Teilung durch Flächenabstandsgleiche und Flächenwinkelhalbierende	199
2.5.8.	Eine analytische Berechnung der Lage des Inkugelmittelpunkts	201
2.5.9.	Ein Satz über die Winkel an den Inkugel-Berührungspunkten	202
2.6.	<b>Die flächenberührenden Kugeln des Tetraeders</b>	205
2.6.1.	Die Raumteilung mittels eines Tetraeders	205
2.6.2.	Die flächenberührenden Kugeln und ihre Radienbeziehungen	206
2.6.3.	Zusammenfassung über die flächenberührenden Kugeln	216
2.7.	<b>Der Schwerpunkt des Tetraeders</b>	217
2.7.1.	Konstruktion des Tetraeder-Schwerpunkts	217
2.7.2.	Vektorielle Berechnung des Schwerpunkts	219
2.7.3.	Das Schwerpunktetetraeder	221
2.7.4.	Die Schwerpunktekugel	222
2.7.5.	Die Mittenparallelogramme und das Mittenoktaeder	223
2.7.6.	Beziehungen zwischen den Kanten eines Tetraeders und seinen Schwerlinien	226
2.8.	<b>Die physikalischen Schwerpunkte des Tetraeders</b>	229
2.8.1.	Die physikalischen Schwerpunkte des Dreiecks	231
2.8.2.	Der Ecken- und der Volumenschwerpunkt des Tetraeders	234
2.8.3.	Der Flächenschwerpunkt des Tetraeders	236
2.8.4.	Der Kantenschwerpunkt des Tetraeders	240
2.8.5.	Vektorielle Konstruktion der physikalischen Schwerpunkte	243
2.9.	<b>Die Höhen des Tetraeders</b>	247
2.9.1.	Aussagen über die Tetraederhöhen	247
2.9.2.	Der Punkt von Monge	254

2.9.3.	Das Höhen-Hyperboloid des Tetraeders .....	259
2.10.	<b>Berechnungen am Tetraeder</b> .....	263
2.10.1.	Die Standard-Volumenformel des Tetraeders.....	263
2.10.2.	Weitere Volumenformeln des Tetraeders .....	268
2.10.3.	Sinussätze am Tetraeder.....	279
2.10.4.	Kosinussätze am Tetraeder.....	281
2.10.5.	Einige vektorielle Berechnungsergebnisse am Tetraeder.....	289
2.11.	<b>Ungleichungen am Tetraeder</b> .....	291
2.11.1.	Von der Dreiecksungleichung zu Tetraederungleichungen .....	291
2.11.2.	Existenzaussagen für Tetraeder .....	296
2.11.3.	Anwendung von Standard-Ungleichungen .....	302
2.12.	<b>Die Sätze von Menelaos und Ceva</b> .....	303
2.12.1.	Der Satz von Menelaos für Dreiecke und für Tetraeder.....	303
2.12.2.	Der Satz von Ceva für Dreiecke und für Tetraeder.....	307
2.12.3.	Eine Anwendung des Satzes von CEVA auf Dreiecke und auf Tetraeder	314
2.13.	<b>Verschiedenes</b> .....	323
2.13.1.	Ebene Tetraederschnitte .....	323
2.13.2.	Minimierung der Tetraederoberfläche.....	337
2.13.3.	Der Lote-Satz von Jacob Steiner .....	350
2.13.4.	Satz von Miquel .....	360
2.13.5.	Der Satz von Desargues.....	366
3.	<b>Besondere Tetraeder (Fortsetzung)</b> .....	373
3.1.	<b>Tetraeder mit Höhenschnittpunkt (orthozentrische Tetraeder)</b> .....	375
3.1.1.	Einfache Konstruktionen orthozentrischer Tetraeder.....	375
3.1.2.	Lage des Höhenschnittpunkts.....	376
3.1.3.	Weitere Aussagen über orthozentrische Tetraeder .....	377
3.1.4.	Die Zwölfpunktekugeln .....	379
3.1.5.	Einige Berechnungen an orthozentrischen Tetraedern.....	388
3.2.	<b>Tetraeder mit kantenberührender Kugel</b> .....	395
3.2.1.	Notwendige Bedingungen für Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft....	395
3.2.2.	Hinreichende Bedingungen für ein Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft .....	396
3.2.3.	Konstruktion eines Tetraeders zu vorgegebener Kantenkugel .....	402
3.2.4.	Flächenwinkel-Kennzeichnung des Tetraeders mit Kantenkugel.....	404
3.2.5.	Formel für den Radius der Kantenkugel .....	406
3.2.6.	Beziehung des Tetraeders mit Kantenkugel zu den orthozentrischen und gleichseitigen Tetraedern .....	409
3.3.	<b>Tetraeder mit gleichen Gegenkantenprodukten (isodynamische Tetraeder)</b> .....	411
3.3.1.	Eine Konstruktion isodynamischer Tetraeder .....	411
3.3.2.	Beziehung isodynamischer Tetraeder zu anderen Tetraedertypen .....	411
3.3.3.	Kennzeichnungen isodynamischer Tetraeder.....	412
3.3.4.	Die Lemoine-Kreise und die Lemoine-Kugeln.....	415
	<b>Quellenverzeichnis</b> .....	419

<b>Anhang</b> .....	435
<b>A1 Raumgeometrische Basisbegriffe und -aussagen</b> .....	437
<b>A2 Geometrische Konstruktionen im Raum</b> .....	449

**Anlage: CD mit Buch als Hypertext, Cabri 3D-Demo-Version und Handbuch**  
Hinweise zur Installation und Benutzung in der Liesmich-Datei auf der CD