

# Inhaltsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| <b>1. Zufallsexperimente und zufällige Ereignisse</b> .....  | 1  |
| <b>2. Absolute und relative Häufigkeiten</b> .....   | 9  |
| <b>3. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff im täglichen Sprachgebrauch<br/>(subjektive Wahrscheinlichkeit)</b> ..... | 13 |
| <b>4. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff</b> .....  | 15 |
| 4.1. Die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Versuchsergebnisse .....   | 16 |
| 4.2. Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses .....   | 17 |
| <b>5. Kombinatorik</b> .....   | 22 |
| 5.1. Anordnungsmöglichkeiten .....   | 22 |
| 5.2. Auswahlmöglichkeiten mit Berücksichtigung der Reihenfolge .....   | 28 |
| 5.3. Auswahlmöglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge .....  | 38 |
| 5.4. Zusammenstellung der Formeln aus der Kombinatorik .....   | 45 |
| 5.5. Urnenmodelle .....  | 46 |
| <b>6. Geometrische Wahrscheinlichkeiten</b> .....  | 50 |
| 6.1. Geometrische Wahrscheinlichkeiten auf der Zahlengeraden .....   | 50 |
| 6.2. Geometrische Wahrscheinlichkeiten in der Ebene .....  | 53 |
| <b>7. Allgemeine Wahrscheinlichkeiten</b> .....  | 58 |
| 7.1. Axiome der Wahrscheinlichkeit .....   | 58 |
| 7.2. Schätzwerte für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit .....  | 62 |
| <b>8. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und unabhängige Ereignisse</b> .....                                       | 63 |
| 8.1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....   | 63 |
| 8.2. Stochastisch unabhängige Ereignisse .....   | 69 |
| 8.3. Unabhängige Wiederholungen von Zufallsexperimenten .....  | 71 |
| <b>9. Mehrstufige Zufallsexperimente</b> .....   | 74 |
| 9.1. Zweistufige Zufallsexperimente .....  | 74 |
| 9.2. Mehrstufige Zufallsexperimente .....  | 81 |
| 9.3. Unabhängige Versuchswiederholungen .....  | 84 |
| 9.4. Binomialverteilung (Verteilung der absoluten Häufigkeit) .....  | 84 |
| 9.5. Die geometrische Verteilung (Warten auf den ersten Erfolg) .....  | 86 |
| <b>10. Beschreibende Statistik (Stichprobendarstellung)</b> .....  | 89 |
| 10.1. Merkmalstypen und Stichproben .....  | 89 |
| 10.2. Graphische Darstellungen .....   | 90 |
| 10.2.1. Graphische Darstellungen bei qualitativen Merkmalen .....  | 90 |
| 10.2.2. Graphische Darstellungen bei quantitativen Merkmalen .....   | 91 |
| 10.3. Mittelwerte einer Stichprobe .....   | 95 |
| 10.3.1. Das arithmetische Mittel (Mittelwert) .....  | 95 |
| 10.3.2. Der Median (Zentralwert) einer Stichprobe .....  | 98 |
| 10.3.3. Vergleich von Mittelwert und Median .....  | 99 |

|  |            |
|--|------------|
| 10.3.4. Das harmonische Mittel .....   | 100        |
| 10.3.5. Das geometrische Mittel .....  | 102        |
| 10.4. Quantile einer Stichprobe .....  | 103        |
| 10.5. Streuungsmaße (Abweichungsmaße) einer Stichprobe .....   | 104        |
| 10.5.1. Der mittlere (durchschnittliche) Abstand .....   | 106        |
| 10.5.2. Varianz und Standardabweichung (Streuung) einer Stichprobe ..  | 106        |
| 10.5.3. Vergleich des mittleren Abstands mit der Standardabweichung ..   | 108        |
| <b>11. Diskrete Zufallsvariable .....</b>  | <b>110</b> |
| 11.1. Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen .....  | 110        |
| 11.2. Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....  | 111        |
| 11.3. Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls-<br>variablen .....                                       | 123        |
| 11.4. Die Binomialverteilung – die Zufallsvariable der absoluten<br>Häufigkeit .....                                   | 127        |
| 11.5. Die hypergeometrische Verteilung – Ziehen ohne Zurücklegen ....  | 129        |
| 11.6. Die geometrische Verteilung .....  | 130        |
| 11.7. Die Poisson-Verteilung .....   | 134        |
| <b>12. Die Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve) .....</b>  | <b>137</b> |
| 12.1. Gaußsche Glockenkurven .....   | 137        |
| 12.2. Die Standard-Normalverteilung – $N(0;1)$ -Verteilung .....   | 142        |
| 12.2.1. Die Glockenkurve (Dichte) der Standard-Normalverteilung .....  | 142        |
| 12.2.2. Die Standardisierung einer Stichprobe .....  | 142        |
| 12.2.3. Die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung .....  | 144        |
| 12.2.4. Die Kenngrößen der Standard-Normalverteilung .....   | 146        |
| 12.3. Die allgemeine Normalverteilung – die $N(\mu;\sigma^2)$ -Verteilung .....  | 147        |
| 12.3.1. Die Dichte einer Normalverteilung .....  | 147        |
| 12.3.2. Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung .....   | 147        |
| 12.3.3. Wahrscheinlichkeiten für Intervalle .....  | 147        |
| 12.3.4. Die zwei-Sigma-Regel .....   | 148        |
| 12.3.5. Die drei-Sigma-Regel .....   | 149        |
| 12.3.6. Schätzwerte für einen unbekanntem Erwartungswert und eine<br>unbekannte Varianz einer Normalverteilung .....   | 149        |
| 12.3.7. Summen unabhängiger Normalverteilungen .....   | 149        |
| 12.4. Approximation der Binomialverteilung durch die Normal-<br>verteilung .....                                       | 150        |
| 12.5. Approximation von Summen unabhängiger identisch<br>verteilter Zufallsvariablen durch eine Normalverteilung ..... | 152        |
| <b>13. Weitere stetige Verteilungen .....</b>  | <b>154</b> |
| 13.1. Die gleichförmige (gleichmäßige) Verteilung .....  | 154        |
| 13.2. Die Exponentialverteilung .....  | 157        |
| <b>14. Stichprobentheorie (repräsentative Zufallsstichproben) .....</b>  | <b>160</b> |
| 14.1. Vorgehensweise bei statistischen Verfahren .....   | 160        |
| 14.2. Stichproben bei endlichen Grundgesamtheiten .....  | 162        |
| 14.3. Stichprobenwerte als Realisierungen von Zufallsvariablen<br>(unabhängige Zufallsstichproben) .....               | 165        |

|   |     |
|---|-----|
| <b>15. Parameterschätzung</b> .....   | 167 |
| 15.1. Schätzwerte für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit .....  | 168 |
| 15.2. Schätzwerte für den relativen Anteil in einer endlichen Grund-<br>gesamtheit (Qualitätskontrolle) .....                 | 170 |
| 15.3. Schätzwerte für einen unbekanntem Erwartungswert .....  | 171 |
| 15.4. Schätzwerte für eine unbekannte Varianz .....   | 172 |
| <br>  |     |
| <b>16. Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)</b> .....   | 175 |
| 16.1. Vertrauensintervalle für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit $p$ ..  | 178 |
| 16.2. Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Erwartungswert ....  | 183 |
| 16.2.1. Vertrauensintervalle für $\mu$ bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....   | 183 |
| 16.2.2. Vertrauensintervalle für $\mu$ bei unbekannter Varianz .....  | 186 |
| 16.3. Vertrauensintervalle für die Varianz $\sigma^2$ bzw. die Standard-<br>abweichung $\sigma$ .....                         | 187 |
| 16.4. Einseitige Vertrauensintervalle .....   | 189 |
| <br>  |     |
| <b>17. Test eines Parameters (Signifikanztest)</b> .....  | 192 |
| 17.1. Ein Beispiel zur Begriffsbildung (Qualitätskontrolle) .....   | 192 |
| 17.2. Allgemeine Parametertests .....   | 196 |
| 17.3. Test einer unbekanntem Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ .....  | 198 |
| 17.4. Test eines unbekanntem Erwartungswertes $\mu$ .....   | 204 |
| 17.4.1. Test bei bekannter Varianz $\sigma^2$ der Zufallsvariablen $X$ .....  | 204 |
| 17.4.2. Test bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ der Zufallsvariablen $X$ .....  | 206 |
| 17.5. Test einer unbekanntem Varianz $\sigma^2$ (Standardabweichung $\sigma$ ) ....   | 207 |
| <br>  |     |
| <b>18. Vergleich der Parameter zweier Verteilungen (Grundgesamtheiten)</b> .....  | 209 |
| 18.1. Test auf Gleichheit zweier Parameter .....  | 209 |
| 18.2. Test auf eine bestimmte Differenz zweier Parameter .....  | 210 |
| 18.3. Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilungen) ...  | 210 |
| 18.4. Vertrauensintervalle für die Differenz zweier Wahrscheinlichkeiten  | 213 |
| 18.5. Vergleich zweier Erwartungswerte. Vergleich zweier Messreihen<br>(zweier Stichproben) .....                             | 214 |
| 18.5.1. Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben<br>(Vergleich zweier abhängiger Messreihen) .....        | 214 |
| 1. Test der Differenz zweier Erwartungswerte bei verbundenen<br>Stichproben .....   | 215 |
| 2. Vertrauensintervalle für die Differenz zweier Erwartungswerte<br>bei verbundenen Stichproben .....                         | 217 |
| 18.5.2. Vergleich zweier Erwartungswerte bei nichtverbundenen Stichproben<br>(Vergleich zweier unabhängiger Messreihen) ..... | 217 |
| 1. Test der Differenz zweier Erwartungswerte bei nichtverbundenen<br>Stichproben .....  | 218 |
| 2. Vertrauensintervalle für die Differenz zweier Erwartungswerte<br>bei nichtverbundenen Stichproben .....                    | 219 |
| <br>  |     |
| <b>19. Der Chi-Quadrat-Anpassungstest</b> .....   | 220 |
| 19.1. Test auf vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten .....  | 220 |
| 19.2. Test auf Gleichheit aller Wahrscheinlichkeiten .....  | 222 |
| 19.3. Test einer Verteilungsfunktion .....  | 224 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>20. Die Vierfelder-Tafel (Unabhängigkeitstest)</b> ..... | 226 |
| <b>Anhang: Tabellen</b> .....                               | 228 |
| <b>Register</b> .....                                       | 234 |