

Inhaltsverzeichnis

Einführung	21
Zu diesem Buch	21
Konventionen in diesem Buch	21
Was Sie nicht lesen müssen	22
Törichte Annahmen über den Leser	22
Wie dieses Buch aufgebaut ist	22
Teil I: Grundlagen der linearen Algebra	23
Teil II: Landschaftserkundung zur linearen Algebra	23
Teil III: Analytische Geometrie fürs Leben	23
Teil IV: Lineare Algebra for Runaway Dummies	24
Teil V: Top Ten Teil	24
Symbole in diesem Buch	24
Wie es weitergeht	25
Teil I	
Grundlagen der Algebra	27
Kapitel 1	
Die bunte Welt der linearen Algebra	29
Dafür braucht man lineare Algebra	30
Systeme von Gleichungen lösen	31
Geometrische Rätsel knacken	31
Die Bausteine der linearen Algebra erkennen	33
Körper und Vektorräume	34
Sinnvolle Verknüpfungen von Vektoren	34
Die Werte in Reih' und Glied bringen	35
Matrizen und ihre Verknüpfungen	37
Determinanten	39
Alles in einen linearen Zusammenhang bringen	40
Lineare Abbildungen	41
Affine Transformationen	43
Noch bunter geht es nicht	43
Eigenwerte und Eigenvektoren	44
Diagonalisieren und der Spektralsatz	46
Wie man den linearen Überblick behält	49
Kapitel 2	
Zahlen gegen reelle Komplexe	51
Reelle Zahlen in der Realität	51
Grundidee der komplexen Zahlen	53

Crashkurs: Rechnen mit komplexen Zahlen	58
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	58
Multiplikation und Division komplexer Zahlen	60
Besonderheiten komplexer Zahlen	63
Beträge komplexer Zahlen	63
Konjugierte Komplexe	65

Kapitel 3

Körper und andere Welten

71

Verkündigung der Körpergesetze	71
Das Assoziativgesetz	73
Das Kommutativgesetz	76
Das neutrale Element	78
Inverse Elemente	80
Das Distributivgesetz	81
Die Algebraische Struktur der Körper	83
Endlich unendliche Körper	84
Der kleinste Körper	84
Die Klassischen Zahlkörper	86
Na so was: die Restklassenkörper	87

Kapitel 4

Wen Amors Vektor trifft

91

Woher die Vektoren kommen	91
Erweitern Sie Ihren Horizont – um n Dimensionen	92
Grundlegende Vektoroperationen	94
Addition und Subtraktion von Vektoren	95
Skalare Multiplikation von Vektoren	96
Das Skalarprodukt von Vektoren	98
Die Norm eines Vektors	100
Das Vektorprodukt	102
Der Winkel zwischen Vektoren	103
Diese Vektoren sind nicht normal	106
Jetzt wird es eng: der n-Raum	107
Der Euklidische n-Raum	108
Der komplexe n-Raum	110
Warum das alles kein Unsinn ist	111
Arbeit und Kraft	112
Das Drehmoment	113
Tricks mit Vektoren	114
Der Kosinussatz	114

Teil II

Landschaftserkundung zur linearen Algebra

117

Kapitel 5

Vektorräume mit Aussicht

119

Räume voller Vektoren	119
Vektorraumoperationen	120
Addition von Vektoren	121
Skalare Multiplikation	121
Vektorraumeigenschaften	122
Massenhaft Beispiele für Vektorräume	124
Vektorräume aus n-Tupeln	124
Vektorräume aus Polynomen	125
Vektorräume aus Matrizen	127
Vektorräume von Folgen und Funktionen	127
Vektorräume aus linearen Abbildungen	129
Vektorräume aus Körpern	130
Unterräume – aber nicht im Kellergeschoss	131
Die formale Spezifikation der Unterräume	131
Eine Abkürzung zu den Unterräumen	133
Aufräumen in den Unterräumen	134
Summen von Unterräumen	137
Direkte Summen von Unterräumen	140

Kapitel 6

LGS – Auf lineare Steine können Sie bauen

143

Wie lineare Gleichungssysteme entstehen	143
Darstellungsmöglichkeiten linearer Gleichungssysteme	147
Die Quadratische Form	147
Die Stufenform	149
Die Idealform	150
Prinzipielle Lösungsmengen von LGSen	152
Eindeutige Lösung	152
Freie Parameter in der Lösung	153
Keine Lösungen	155
Das Gauß'sche Eliminationsverfahren zur Lösung von LGSen	156
Der Gauß-Jordan-Algorithmus	160
Lösung eines LGS über die erweiterte Koeffizientenmatrix	161
So geht es auch: LR-Zerlegung nach Gauß	163
Beispiel	164
Determinanten zur Bestimmung von Lösungen	166
Lösung à la Cramer & Cramer	167
Inverse Matrizen zur Lösung einer Matrizengleichung	168
Parametrisierte LGS	169

Kapitel 7

Die Matrix ist überall

177

Wie eine Matrix das Leben erleichtert	177
Lineare Gleichungssysteme als Matrizen darstellen	178
Grundlegende Matrixoperationen	180
Addition von Matrizen	180
Skalare Multiplikation von Matrizen	181
Matrix-Vektorprodukt	183
Matrixmultiplikation	184
Transposition von Matrizen	187
Der Rang einer Matrix	188
Attribute von Matrizen	190
Quadratische Matrizen	190
Reguläre Matrizen	191
Idempotente Matrizen	192
Diagonalmatrizen	194
Adjungierte von Matrizen bestimmen	195
Komplementäre Matrizen erzeugen	195
Matrizen invertieren	198
Mittels Determinanten und Adjunkten	198
Mittels Gauß-Jordan-Algorithmus	198
Komplexe Matrizen, pardon, Matrizen	200
Unitäre Matrizen	200
Hermitesche Matrizen	202
Schieferhermitesche Matrizen	203
Ähnliche Matrizen	203
Der Matrix auf der Spur	204

Kapitel 8

Die lineare Unabhängigkeitserklärung

207

Wir kombinieren linear	207
Warum unabhängig besser ist als abhängig	209
Bestimmung der linearen Unabhängigkeit	210
Bei n-Tupel-Vektoren	211
Bei Polynomen	214
Bei Matrizen	215
Bei linearen Abbildungen	218
Im Allgemeinen	222
Fallstricke der linearen Unabhängigkeit	225
Was lineare Unabhängigkeit mit der Lösung von Gleichungssystemen zu tun hat	226

Kapitel 9
Basen, keine lästige Verwandtschaft
229

Auf dieser Basis beruht unsere Arbeit	229
Beispiel	231
Erzeugende Systeme	234
Lineare Hüllen als Unterräume	235
Beispiele	235
Lineare Unabhängigkeit von Basisvektoren	236
Beispiel	237
Erzeugte Unterräume	238
Beispiel	238
Matrizen und Basen: So geht das!	242
Dimensionen und Basisvektoren	243
Der Dimensionssatz	244
Jetzt haben Sie endlich die Koordinaten	245
Basen für Orthonormal-Verbraucher	245

Teil III
Analytische Geometrie fürs Leben
249
Kapitel 10
Geometrische Grundelemente
251

Affinität zu geometrischen Räumen	251
Punkte im Euklidischen n -Raum	255
Darstellungsmöglichkeiten von Geraden	257
Parameterform	257
Gleichungsform	258
Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen	259
Parameterform	259
Normalenvektor und Normalenform	260
Koordinatenform	261
Achsenabschnittsform	263
Aus der Form gesprungen oder wie Sie von einer Form in die andere gelangen	264
Festhalten, jetzt kommen höherdimensionale Objekte	265
Parameterformen	266
Koordinatenformen und Gleichungssysteme	266
Was sonst noch interessant ist	268
Dreiecke	268
Parallelogramme	269
Spate	270
Flächen zweiter Ordnung	272
Ellipsoid	272
Elliptisches Paraboloid	273
Hyperbolisches Paraboloid	273

Kapitel 11

Abstand halten und schneiden

275

Wir bestimmen den Abstand von ...	275
Punkt zu Punkt	275
Punkt zu Gerade	277
Beispiel	279
Punkt zu Ebene	280
Beispiel	281
Wenn sich zwei Geraden treffen	282
Abstand paralleler Geraden	282
Beispiel	284
Abstand windschiefer Geraden	284
Beispiel	286
Schnittpunkt und -winkel zweier Geraden	287
Beispiel	288
Ebenen kommen ins Spiel	291
Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene	291
Beispiel	292
Durchstoßpunkt und -winkel von Gerade zu Ebene	292
Beispiel	293
Abstand zweier paralleler Ebenen	295
Beispiel	296
Schnittgerade und -winkel zwischen Ebenen	297
Beispiel	298
Überdimensionale Objekte	300
Abstandsbestimmung allgemein	300
Schnittobjekte und -winkel ermitteln	301
Beispiel	301

Kapitel 12

Geometrische Transformationen

303

Geometrie jenseits Lineal und Zirkel	303
Affine Abbildungen	303
Beispiel	305
Identität	309
Translation	309
Transvektion (Scherung)	310
Rotation	313
Beispiel	320
Spiegelung	321
Beispiel	325
Kontraktion	327
Beispiel	328
Die Hauptachsentransformation	329
Hauptachsentransformation – 3D	334

Teil IV
Lineare Algebra for Runaway Dummies
341
Kapitel 13
Raubtierfütterung der Morphismen
343

Was Homomorphismen eigentlich sind	343
Beispiel 1: Quadratische Funktionen	345
Beispiel 2: Trigonometrische Funktionen	346
Beispiel 3: Exponential- oder Logarithmusfunktionen	347
Beispiel 4: Endlich linear	347
Wurfarten, die Sie sich merken sollten	348
Kern einer linearen Abbildung	349
Bild einer linearen Abbildung	349
Surjektivität	350
Injektivität	351
Bijektivität	352
Operationen auf Homomorphismen	353
Beispiel	353
Morphismen, Aufzucht und Pflege	355
Homomorphismen	355
Epimorphismen	356
Monomorphismen	356
Isomorphismen	356
Endomorphismen	357
Automorphismen	358
Projektionen	359
Orthogonale Projektionen	363
Ansteckungsgefahr bei Morphismen, Diagnose: Singularität	364
Lineare Operatoren in der Technik	366
Beispiel	366

Kapitel 14
Ganz bestimmte Determinanten
371

Warum Determinanten wichtig sind	371
Beispiel	372
Was Permutationen mit Determinanten zu tun haben	373
Berechnung von Determinanten	374
Determinanten von 2×2 -Matrizen	374
Beispiele	375
Determinanten mit der Regel von Sarrus berechnen	376
Beispiele	377
Berechnung von Determinanten im Allgemeinen	378
Beispiel	379
Rechenregeln für Determinanten	380

Wie sich die Transpositionen auf Determinanten auswirken	380
Diagonalmatrizen sind die besten Freunde von Determinanten	381
Die Determinante der Einheitsmatrix	381
Skalare Multiplikation und Determinanten	381
Determinanten und der Zeilentausch/Spaltentausch	382
Leibniz trifft auf Gauß	383
Determinantenberechnung für Dreiecksmatrizen	384
Zusammenhang zwischen Determinante und Invertierbarkeit einer Matrix	385
Unterdeterminanten	385
Der Entwicklungssatz	387
Beispiel	388
Determinanten von Homomorphismen	389
Determinanten und das Spatprodukt	390

Kapitel 15

Es reicht, wir wechseln die Basis

393

Ausgangssituation	393
Beispiel	394
Wo die neuen Basisvektoren herkommen	397
Die Übergangsmatrix bestimmen	398
Beispiel	400
Die Übergangsmatrix als linearer Operator	404
Beispiel	406
Basiswechsel bei allgemeinen Homomorphismen	407
Ein instruktives Beispiel zum Basiswechsel	409
Dem Ingeniör ist nichts zu schwör	410

Kapitel 16

Artige Eigenwerte

413

Eigenartige Werte	413
Eigenwerte von Endomorphismen	414
Von Eigenwerten über Eigenvektoren zu Eigenräumen	416
Eigenwerte der Matrixdarstellungen	417
Beispiel	418
Wie man aus Eigenwerten die zugehörigen Eigenvektoren presst	419
Eigenartige Eigenräume	421
Das Jacobi-Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten	422
Beispiel	424
Praxisbeispiele	427
Mechanische Schwingungen	427
Elektromagnetische Schwingkreise	429

Kapitel 17
Diagonalisieren statt um die Ecke denken **431**

Was Matrizen und Homomorphismen gemeinsam haben	431
Beispiel	432
Was die Diagonalmatrix eines Homomorphismus bedeutet	434
Wann Sie überhaupt diagonalisieren können	435
Beispiele	436
Diagonalisieren ohne Verrenkungen	439
Eine Null als Eigenwert	441
Eigene Werte ohne Potenz	442
Was man Schlaues mit der Diagonalisierung anstellen kann	443
Potenzieren nach Basiswechsel	444
Betrachten Sie den Gipfel	446
Der Spektralsatz für Endomorphismen	452
Anwendung des Spektralsatzes für den reellen Zahlenkörper	456
Anwendung des Spektralsatzes für den komplexen Zahlenkörper	459
Die charakteristische Gleichung an unerwarteter Stelle	461
Der Satz von Cayley-Hamilton	461
Anwendungen des Satzes von Cayley-Hamilton	462
Was Sie tun, wenn Sie oben angekommen sind	465

Teil V
Top-Ten-Teil **467**
Kapitel 18
Lineare Algebra in fast zehn Minuten **469**

Linearität verstehen und keine Angst vor Algebra haben	469
Grundaspekte der analytischen Geometrie verinnerlichen	469
Gleichungssysteme mit geometrischen Objekten identifizieren	470
LGSe mit unterschiedlichen Methoden lösen	470
Zusammenhang von Matrizen und linearen Abbildungen begreifen	470
Determinanten und Eigenwerte als Herz einer Matrix betrachten	470
Basiswechsel als Spezialfall eines Isomorphismus erkennen	471
Diagonalisieren zur Ermittlung von Eigenwerten	471
Den Spektralsatz als Gipfel der Erkenntnis ansehen	472

Stichwortverzeichnis
473