

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Statistische Daten</b>	<b>1</b>
1.1	Erhebungen .....	1
1.1.1	Problemstellung .....	1
1.1.2	Begriffsbildungen .....	1
1.2	Statistische Variablen .....	3
1.2.1	Begriffsbildungen .....	3
1.2.2	Klassifikationen .....	5
1.2.3	Transformationen .....	7
1.3	Die Datenmatrix .....	8
1.4	Aufgaben .....	9
<b>2</b>	<b>Darstellung univariater Datensätze</b>	<b>11</b>
2.1	Häufigkeitsverteilungen diskreter Variablen .....	11
2.1.1	Problemstellung .....	11
2.1.2	Häufigkeiten .....	12
2.1.3	Grafische Darstellungen .....	13
2.2	Häufigkeitsverteilungen stetiger Variablen .....	15
2.2.1	Problemstellung .....	15
2.2.2	Geordneter Datensatz .....	16
2.2.3	Stemleaf-Diagramm .....	17
2.2.4	Häufigkeitstabelle .....	18
2.2.5	Das Histogramm .....	20
2.3	Die empirische Verteilungsfunktion .....	22
2.3.1	Einführendes Beispiel .....	22
2.3.2	Empirische Verteilungsfunktion .....	22
2.3.3	Klassierte Daten .....	24
2.4	Quantile .....	26
2.4.1	Problemstellung .....	26
2.4.2	Bestimmung der Quantile .....	27
2.4.3	Spezielle Quantile .....	29
2.4.4	Quantildiagramme .....	30
2.4.5	5-Zahlen-Zusammenfassung .....	32
2.4.6	Box-Plots .....	33
2.5	Aufgaben .....	35

<b>3</b>	<b>Maßzahlen für univariate Datensätze</b>	<b>39</b>
3.1	Maßzahlen der Lage .....	39
3.1.1	Erfassung des Niveaus .....	39
3.1.2	Der Median .....	40
3.1.3	Das arithmetische Mittel .....	41
3.1.4	Berechnung des arithmetischen Mittels .....	42
3.1.5	Eigenschaften des arithmetischen Mittels .....	44
3.1.6	Weitere Maßzahlen der Lage .....	48
3.2	Streuungsmaße .....	50
3.2.1	Problemstellung .....	50
3.2.2	Durchschnittliche Abweichung und Standardabweichung .....	51
3.2.3	Varianz .....	54
3.2.4	Weitere Streuungsmaßzahlen .....	57
3.2.5	Stabilisierung der Streuung .....	58
3.3	Schiefe empirischer Verteilungen .....	61
3.3.1	Einführendes Beispiel .....	61
3.3.2	Maßzahlen der Schiefe .....	62
3.3.3	Transformation zur Symmetrisierung .....	65
3.4	Konzentrationsmessung .....	70
3.4.1	Problemstellung .....	70
3.4.2	Maße der absoluten Konzentration .....	70
3.4.3	Relative Konzentration .....	73
3.5	Aufgaben .....	77
<b>4</b>	<b>Multivariate Datensätze</b>	<b>81</b>
4.1	Darstellung multivariater diskreter Datensätze .....	81
4.1.1	Problemstellung .....	81
4.1.2	Bivariate Kontingenztafeln .....	82
4.1.3	Bedingte relative Häufigkeiten .....	83
4.1.4	Mehrdimensionale Kontingenztafeln .....	84
4.2	Darstellung bivariater stetiger Datensätze .....	85
4.2.1	Streudiagramm .....	85
4.2.2	Konvexe Hüllen .....	86
4.2.3	Grafische Darstellung der bivariaten Häufigkeitsverteilung .....	87
4.3	Mehrdimensionale Daten .....	88
4.4	Maßzahlen des Zusammenhangs .....	90
4.4.1	Problemstellung .....	91
4.4.2	Die Kovarianz .....	92
4.4.3	Der Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson .....	95
4.4.4	Der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman .....	98
4.4.5	Der Phi-Koeffizient .....	99

4.5	Elementare Regressionsrechnung .....	101
4.5.1	Problemstellung .....	102
4.5.2	Bestimmung der Regressionsgeraden .....	103
4.5.3	Das Bestimmtheitsmaß .....	106
4.6	Aufgaben .....	109
<b>5</b>	<b>Indexzahlen und Zeitreihenanalyse</b>	<b>113</b>
5.1	Indexzahlen .....	113
5.1.1	Messziffern .....	114
5.1.2	Indizes .....	116
5.1.3	Rechnen mit Indizes .....	120
5.2	Elementare Zeitreihenanalyse .....	122
5.2.1	Trendbestimmung .....	123
5.2.2	Saisonbereinigung .....	127
5.3	Aufgaben .....	130
<b>6</b>	<b>Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>133</b>
6.1	Zufallsexperimente und Ereignisse .....	133
6.1.1	Zufallsexperimente .....	133
6.1.2	Ereignisse .....	135
6.2	Wahrscheinlichkeiten .....	139
6.2.1	Chancen von Ereignissen .....	139
6.2.2	Häufigkeiten von Ereignissen .....	140
6.3	Statistische Wahrscheinlichkeit .....	141
6.3.1	Axiome von Kolmogorov .....	143
6.3.2	Das Gleichmöglichkeitsmodell .....	145
6.3.3	Zufallsauswahlen aus endlichen Grundgesamtheiten .....	147
6.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit .....	151
6.4.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	151
6.4.2	Unabhängigkeit .....	155
6.5	Zufallsvariablen .....	157
6.5.1	Einführendes Beispiel .....	158
6.5.2	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	158
6.5.3	Verteilungsfunktion .....	160
6.6	Aufgaben .....	162
<b>7</b>	<b>Diskrete Verteilungen</b>	<b>165</b>
7.1	Diskrete Zufallsvariablen .....	165
7.1.1	Wahrscheinlichkeitsfunktion .....	165
7.1.2	Bestimmung eines Verteilungsmodells .....	166
7.1.3	Verteilungsfunktion .....	168

7.2	Maßzahlen diskreter Verteilungen .....	170
7.2.1	Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen .....	170
7.2.2	Varianz diskreter Zufallsvariablen .....	173
7.3	Multivariate diskrete Zufallsvariablen.....	176
7.3.1	Kovarianz und Korrelation .....	179
7.4	Aufgaben .....	181
<b>8</b>	<b>Diskrete Verteilungsmodelle</b> .....	<b>185</b>
8.1	Die hypergeometrische Verteilung .....	186
8.2	Die Binomialverteilung .....	188
8.2.1	Einführendes Beispiel .....	188
8.2.2	Herleitung der Verteilung .....	189
8.2.3	Eigenschaften .....	191
8.2.4	Anpassung an empirische Verteilungen .....	193
8.2.5	Die Multinomialverteilung .....	193
8.3	Die Poisson-Verteilung .....	194
8.3.1	Problemstellung .....	194
8.3.2	Ableitung und Eigenschaften .....	195
8.3.3	Anpassung an empirische Verteilungen .....	196
8.4	Die geometrische Verteilung .....	198
8.4.1	Einführendes Beispiel .....	198
8.4.2	Ableitung und Eigenschaften .....	198
8.5	Die negative Binomialverteilung .....	200
8.5.1	Ableitung und Eigenschaften .....	200
8.5.2	Anpassung an empirische Verteilungen .....	202
8.6	Zur Auswahl eines diskreten Verteilungsmodells .....	203
8.6.1	Einführendes Beispiel .....	203
8.6.2	Das Auswahlendiagramm.....	204
8.7	Aufgaben .....	207
<b>9</b>	<b>Stetige Verteilungen</b> .....	<b>211</b>
9.1	Grundlagen .....	211
9.1.1	Einführendes Beispiel .....	211
9.1.2	Stetige Verteilungsfunktionen .....	212
9.1.3	Dichtefunktion .....	213
9.1.4	Theoretische Quantile.....	216
9.2	Maßzahlen stetiger Verteilungen .....	221
9.2.1	Maßzahlen der Lage .....	221
9.2.2	Die Varianz .....	223
9.2.3	Schiefe.....	224

9.3	Multivariate stetige Verteilungen .....	227
9.4	Aufgaben .....	230
<b>10</b>	<b>Stetige Verteilungsmodelle</b>	<b>233</b>
10.1	Stetige Gleichverteilung .....	233
10.2	Die Pareto-Verteilung .....	235
10.2.1	Anpassung an empirische Verteilungen .....	235
10.3	Die Exponentialverteilung .....	238
10.3.1	Ableitung und Eigenschaften .....	238
10.3.2	Anpassung an empirische Verteilungen .....	240
10.4	Die Laplace-Verteilung .....	242
10.5	Die Gammaverteilung .....	244
10.6	Aufgaben .....	247
<b>11</b>	<b>Die Normalverteilung</b>	<b>249</b>
11.1	Grundlagen .....	249
11.1.1	Problemstellung .....	249
11.1.2	Definition und Bedeutung der Parameter .....	250
11.1.3	Eigenschaften .....	251
11.1.4	Anpassung an empirische Verteilungen .....	254
11.2	Approximation von Verteilungen .....	258
11.2.1	Problemstellung .....	258
11.2.2	Der zentrale Grenzwertsatz .....	258
11.2.3	Approximation der Binomialverteilung .....	260
11.2.4	Approximation der Poisson-Verteilung .....	262
11.3	Die logarithmische Normalverteilung .....	263
11.3.1	Problemstellung .....	263
11.3.2	Definition und Eigenschaften .....	264
11.3.3	Anpassung an empirische Verteilungen .....	265
11.4	Die bivariate Normalverteilung .....	266
11.4.1	Problemstellung .....	266
11.4.2	Ableitung und Eigenschaften .....	267
11.4.3	Anpassung an empirische Verteilungen .....	269
11.5	Aufgaben .....	271
<b>12</b>	<b>Stichprobenfunktionen</b>	<b>275</b>
12.1	Grundlagen .....	275
12.1.1	Einführendes Beispiel .....	275
12.1.2	Begriffsfestlegung .....	276
12.2	Spezielle Stichprobenfunktionen .....	278
12.2.1	Das arithmetische Mittel .....	278

12.2.2	Die relative Häufigkeit.....	280
12.2.3	Die empirische Verteilungsfunktion.....	282
12.2.4	Monte-Carlo-Simulation.....	282
12.3	Aufgaben.....	284
<b>13</b>	<b>Schätzen von Parametern</b>	<b>285</b>
13.1	Schätzfunktionen und ihre Eigenschaften.....	285
13.1.1	Problemstellung.....	285
13.1.2	Schätzfunktionen.....	286
13.1.3	Mittlerer quadratischer Fehler.....	287
13.1.4	Erwartungstreue.....	290
13.1.5	Konsistenz.....	293
13.1.6	Robustheit.....	294
13.1.7	Standardfehler.....	296
13.2	Schätzmethoden.....	299
13.2.1	Problemstellung.....	299
13.2.2	Momentenmethode.....	299
13.2.3	Maximum-Likelihood-Methode.....	300
13.2.4	Bestimmung des Maximums von $L(\theta)$ .....	304
13.3	Aufgaben.....	307
<b>14</b>	<b>Konfidenzintervalle</b>	<b>311</b>
14.1	Problemstellung.....	311
14.2	Allgemeine Definition eines Konfidenzintervalles.....	312
14.3	Konfidenzintervalle für Maßzahlen der Lage.....	316
14.3.1	Konfidenzintervall für $\mu$ bei Normalverteilung mit unbekanntem $\sigma^2$ .....	316
14.3.2	Approximative Konfidenzintervalle für den Erwartungswert.....	318
14.3.3	Konfidenzintervall für den Median.....	321
14.4	Konfidenzintervalle für Maßzahlen der Streuung.....	323
14.4.1	Konfidenzintervall für $\sigma^2$ bei Normalverteilung.....	324
14.4.2	Konfidenzintervalle für zwei Quartile.....	326
14.5	Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten und Anteile.....	328
14.5.1	Problemstellung.....	328
14.5.2	Approximatives Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit.....	328
14.5.3	Approximatives Konfidenzintervall für einen Anteil.....	330
14.5.4	Länge der Konfidenzintervalle für $p$ .....	331
14.6	Aufgaben.....	332
<b>15</b>	<b>Testen von Hypothesen</b>	<b>335</b>
15.1	Reine Signifikanztests.....	335
15.1.1	Problemstellung.....	335

15.1.2	Tests auf der Basis von Konfidenzintervallen .....	335
15.1.3	Tests auf der Basis von Prüfgrößen .....	336
15.1.4	Der $P$ -Wert .....	339
15.2	Die Elemente der klassischen Testtheorie .....	340
15.2.1	Problemstellung .....	340
15.2.2	Formen von Hypothesen .....	340
15.2.3	Fehlerarten .....	342
15.2.4	Die Gütefunktion .....	343
15.3	Aufgaben .....	346
<b>16</b>	<b>Spezielle Parametertests</b> .....	<b>349</b>
16.1	Einstichprobentests .....	349
16.1.1	Tests auf $\mu$ bei Normalverteilung .....	349
16.1.2	Approximative Tests auf $\mu$ .....	350
16.1.3	Test auf $\tilde{\mu}$ bei symmetrischen Verteilungen .....	351
16.1.4	Test auf $\tilde{\mu}$ bei beliebigen stetigen Verteilungen .....	353
16.1.5	Test auf $\sigma^2$ bei Normalverteilung .....	355
16.1.6	Test auf eine Wahrscheinlichkeit $p$ .....	356
16.2	Parametervergleiche bei unabhängigen Stichproben .....	357
16.2.1	Vergleich von $\mu_X$ und $\mu_Y$ bei Normalverteilung; $\sigma_X^2$ und $\sigma_Y^2$ bekannt .....	358
16.2.2	Vergleich von $\mu_X$ und $\mu_Y$ ; $\sigma_X^2$ und $\sigma_Y^2$ unbekannt; Stichproben groß .....	358
16.2.3	Vergleich von $\mu_X$ und $\mu_Y$ bei Normalverteilung; $\sigma_X^2$ und $\sigma_Y^2$ unbekannt; Stichproben klein .....	360
16.2.4	Vergleich von $\tilde{\mu}_X$ und $\tilde{\mu}_Y$ .....	361
16.2.5	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten .....	363
16.3	Aufgaben .....	364
<b>17</b>	<b>Varianzanalyse</b> .....	<b>369</b>
17.1	Einfache Varianzanalyse .....	369
17.1.1	Einführendes Beispiel .....	369
17.1.2	Das Modell .....	370
17.1.3	Der Test bei Normalverteilung .....	371
17.1.4	Multiple Vergleiche bei Normalverteilung .....	374
17.1.5	Ungleiche Streuungen .....	375
17.1.6	Nicht-normalverteilte Variablen .....	377
17.2	Zweifache Varianzanalyse .....	379
17.2.1	Einführendes Beispiel .....	379
17.2.2	Modell mit Wechselwirkungen .....	380
17.2.3	Tests bei Normalverteilung .....	381
17.2.4	Ungleiche Varianzen .....	384
17.2.5	Nicht-normalverteilte Störungen .....	386
17.3	Aufgaben .....	389

<b>18</b>	<b>Anpassungs- und Unabhängigkeitstests</b>	<b>393</b>
18.1	Anpassungstests .....	393
18.1.1	Problemstellung .....	393
18.1.2	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest für vollständig spezifizierte Verteilungen... 394	394
18.1.3	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest für Verteilungen mit unbekanntem Parametern .....	396
18.1.4	Das Chigramm .....	399
18.1.5	Der Kolmogorov-Smirnov-Test .....	401
18.1.6	Anpassungstests vom Korrelationstyp .....	405
18.2	Unabhängigkeitstests .....	407
18.2.1	Problemstellung .....	407
18.2.2	Der Chi-Quadrat-Test .....	409
18.2.3	Tests auf Korrelation .....	412
18.3	Aufgaben .....	414
<b>19</b>	<b>Das Regressionsmodell</b>	<b>417</b>
19.1	Das einfache lineare Regressionsmodell .....	417
19.1.1	Einführende Beispiele .....	418
19.1.2	Entwicklung des Modells .....	420
19.2	Schätzen und Testen im einfachen linearen Regressionsmodell .....	421
19.2.1	Problemstellung .....	421
19.2.2	Die Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion .....	422
19.2.3	Eigenschaften der KQ-Schätzer .....	423
19.2.4	Das Regressionsmodell mit normalverteilten Fehlern .....	425
19.2.5	Konfidenzintervalle und Tests für die Regressionskoeffizienten .....	427
19.2.6	Konfidenzintervalle und Konfidenzband für die Regressionsgerade .....	429
19.2.7	Prognoseintervalle .....	431
19.3	Residuenanalyse .....	431
19.3.1	Systematische Änderung des Mittels .....	432
19.3.2	Inhomogenität der Varianz .....	433
19.3.3	Ausreißer .....	434
19.3.4	Verletzung der Normalverteilungsannahme .....	437
19.4	Linearisieren eines Zusammenhanges .....	439
19.4.1	Problemstellung .....	439
19.4.2	Transformationen .....	440
19.5	Das multiple lineare Regressionsmodell .....	442
19.5.1	Problemstellung .....	443
19.5.2	Das Modell und seine Schätzung .....	443
19.5.3	Koeffizientenschätzer bei zwei erklärenden Variablen .....	444
19.5.4	Interpretation der Koeffizienten .....	446
19.5.5	Testen der Koeffizienten .....	447
19.5.6	Beurteilung der multiplen Regression .....	448
19.5.7	Überprüfung der Modellannahmen .....	449



---

19.5.8	Multikollinearität .....	451
19.6	Aufgaben .....	453
<b>Lösungen zu den Aufgaben mit ungeraden Nummern</b>		<b>457</b>
<b>Tabellen</b>		<b>489</b>
<b>Literatur</b>		<b>515</b>
<b>Index</b>		<b>521</b>