

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>1 Mengen und Logik</b>	<b>1</b>
1.1 Definition und Darstellung von Mengen . . . . .	2
1.1.1 Ein Mengenbegriff . . . . .	3
1.1.2 Darstellung von Mengen . . . . .	5
1.1.3 Bezeichner für Zahlenmengen . . . . .	8
1.1.4 Russellsche Antinomie . . . . .	9
1.1.5 Zusammenfassung . . . . .	11
1.2 Aussagenlogik . . . . .	11
1.2.1 Alphabet der Aussagenlogik . . . . .	12
1.2.2 Syntax aussagenlogischer Formeln . . . . .	13
1.2.3 Semantik aussagenlogischer Formeln . . . . .	14
1.2.4 Zusammenfassung . . . . .	21
1.3 Logische Folgerungen und Implikationen . . . . .	22
1.3.1 Logische Folgerung . . . . .	22
1.3.2 Implikation . . . . .	25
1.3.3 Kalküle . . . . .	26
1.3.4 Theorien . . . . .	28
1.3.5 Zusammenfassung . . . . .	29
1.4 Äquivalenzen, Basen und Normalformen . . . . .	30
1.4.1 Aussagenlogische Äquivalenzen . . . . .	30
1.4.2 Aussagenlogische Basen . . . . .	34
1.4.3 Disjunktive und konjunktive Normalform . . . . .	37
1.4.4 Zusammenfassung . . . . .	43
1.5 Resolutionskalkül . . . . .	44
1.5.1 Klauselmengen . . . . .	44
1.5.2 Der Resolutionsoperator . . . . .	46
1.5.3 Das Resolutionsverfahren . . . . .	51
1.5.4 Zusammenfassung . . . . .	53
1.6 Hornlogik . . . . .	54
1.6.1 Hornformeln und Hornklauseln . . . . .	55
1.6.2 Erfüllbarkeit von Hornformeln . . . . .	56
1.6.3 Kleinste Modelle . . . . .	58
1.6.4 Zusammenfassung . . . . .	59
1.7 Prädikatenlogik . . . . .	59
1.7.1 Alphabet der Prädikatenlogik . . . . .	60
1.7.2 Syntax prädikatenlogischer Formeln . . . . .	60
1.7.3 Semantik prädikatenlogischer Formeln . . . . .	62
1.7.4 Weitere Logiken . . . . .	65
1.7.5 Zusammenfassung . . . . .	66
1.8 Beweismethoden . . . . .	66
1.8.1 Direkter Beweis . . . . .	67

1.8.2	Indirekter Beweis . . . . .	68
1.8.3	Beweis durch Widerspruch . . . . .	69
1.8.4	Ringschluss . . . . .	70
1.8.5	Zusammenfassung . . . . .	71
1.9	Operationen auf Mengen . . . . .	71
1.9.1	Teilmengen . . . . .	72
1.9.2	Potenzmengen . . . . .	74
1.9.3	Verknüpfung von Mengen . . . . .	75
1.9.4	Elementare Eigenschaften . . . . .	76
1.9.5	Zusammenfassung . . . . .	80
1.10	Boolesche Algebra . . . . .	80
1.10.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	80
1.10.2	Isomorphie Boolescher Algebren . . . . .	83
1.10.3	Zusammenfassung . . . . .	85
<b>2</b>	<b>Relationen und Funktionen</b> . . . . .	<b>87</b>
2.1	Relationen . . . . .	88
2.1.1	Kartesisches Produkt . . . . .	89
2.1.2	Relationen: Definitionen und Eigenschaften . . . . .	90
2.1.3	Ordnungen . . . . .	94
2.1.4	Äquivalenzrelationen . . . . .	97
2.1.5	Umkehrrelationen . . . . .	101
2.1.6	Komposition von Relationen . . . . .	101
2.1.7	Reflexiv-transitive Hüllen . . . . .	103
2.1.8	Zusammenfassung . . . . .	104
2.2	Funktionen . . . . .	105
2.2.1	Begriffe und Eigenschaften . . . . .	105
2.2.2	Operationen und Prädikate . . . . .	108
2.2.3	Zusammenfassung . . . . .	109
2.3	Mächtigkeit von Mengen . . . . .	110
2.3.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	110
2.3.2	Zusammenfassung . . . . .	116
<b>3</b>	<b>Zahlenmengen</b> . . . . .	<b>117</b>
3.1	Die Menge der natürlichen Zahlen . . . . .	117
3.1.1	Einführung der Menge der natürlichen Zahlen . . . . .	117
3.1.2	Rechnen mit natürlichen Zahlen . . . . .	120
3.1.3	Rechenregeln in $\mathbb{N}_0$ . . . . .	121
3.1.4	Zusammenfassung . . . . .	123
3.2	Vollständige Induktion und verallgemeinertes Rekursionsschema . . . . .	124
3.2.1	Vollständige Induktion . . . . .	124
3.2.2	Verallgemeinertes Rekursionsschema . . . . .	128
3.2.3	Zusammenfassung . . . . .	130
3.3	Fibonacci-Zahlen . . . . .	131

3.4	Ackermannfunktion . . . . .	134
3.5	Abzählbarkeit von Mengen . . . . .	137
3.5.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	138
3.5.2	Beispiele und Diagonalisierung . . . . .	138
3.5.3	Abschlusseigenschaften abzählbarer Mengen . . . . .	139
3.5.4	Zusammenfassung . . . . .	141
3.6	Die Menge der ganzen Zahlen . . . . .	141
3.6.1	Konstruktion der ganzen Zahlen . . . . .	141
3.6.2	Rechenregeln in $\mathbb{Z}$ . . . . .	144
3.6.3	Zusammenfassung . . . . .	145
3.7	Die Menge der rationalen Zahlen . . . . .	145
3.7.1	Konstruktion der rationalen Zahlen . . . . .	146
3.7.2	Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ . . . . .	148
3.7.3	Zusammenfassung . . . . .	148
3.8	Rechenstrukturen . . . . .	149
3.8.1	Gruppen, Ringe, Körper . . . . .	149
3.8.2	Körpererweiterungen . . . . .	152
3.8.3	Zusammenfassung . . . . .	156
3.9	Die Mengen der reellen und der komplexen Zahlen . . . . .	156
3.9.1	Reelle Zahlen . . . . .	156
3.9.2	Komplexe Zahlen . . . . .	158
3.9.3	Algebraische und transzendente Zahlen . . . . .	163
3.9.4	Zusammenfassung . . . . .	164
<b>4</b>	<b>Berechenbarkeit</b> . . . . .	<b>165</b>
4.1	Primitiv-rekursive Funktionen . . . . .	166
4.2	$\mu$ -Rekursion . . . . .	172
4.3	Churchsche These . . . . .	177
4.4	utm- und smn-Theorem . . . . .	179
4.4.1	Nummerierung der berechenbaren Funktionen . . . . .	180
4.4.2	Das utm-Theorem . . . . .	185
4.4.3	Das smn-Theorem . . . . .	186
4.4.4	Rekursionsatz und Selbstreproduktionssatz . . . . .	187
4.5	Aufzählbare und entscheidbare Mengen . . . . .	188
4.5.1	Entscheidbare und semi-entscheidbare Mengen . . . . .	189
4.5.2	Aufzählbare Mengen . . . . .	190
4.5.3	Reduzierbarkeit von Mengen . . . . .	192
4.6	Unentscheidbare Mengen . . . . .	193
4.6.1	Das Halteproblem . . . . .	193
4.6.2	Der Satz von Rice . . . . .	196
4.6.3	Das Korrektheitsproblem . . . . .	197
4.6.4	Das Äquivalenzproblem . . . . .	197
4.7	Zusammenfassung . . . . .	198

<b>Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>201</b>
<b>Literatur</b>	<b>215</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>217</b>