

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Die Simulationspipeline	1
1.2	Einführung in die Modellierung	4
1.2.1	Allgemeines	5
1.2.2	Herleitung von Modellen	7
1.2.3	Analyse von Modellen	9
1.2.4	Klassifikation von Modellen	11
1.2.5	Skalen	12
1.3	Einführendes zur Simulation	14
1.3.1	Allgemeine Bemerkungen	14
1.3.2	Bewertung	15
<b>2</b>	<b>Benötigtes Instrumentarium in Kurzform</b>	<b>17</b>
2.1	Elementares und Diskretes	18
2.2	Kontinuierliches	19
2.2.1	Lineare Algebra	19
2.2.2	Analysis	21
2.2.3	Bedeutung für Modellbildung und Simulation	27
2.3	Stochastisches und Statistisches	28
2.3.1	Warum Zufall?	28
2.3.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	29
2.3.3	Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume	34
2.3.4	Asymptotik	38
2.3.5	Induktive Statistik	40
2.4	Numerisches	43
2.4.1	Grundlagen	44
2.4.2	Interpolation und Quadratur	47
2.4.3	Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme	54
2.4.4	Iterationsverfahren	56
2.4.5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	63

2.4.6	Partielle Differentialgleichungen	73
2.5	Bezüge Instrumentarium – Anwendungen	77

## Teil I Spielen – entscheiden – planen: Ein Warm-up zur Modellierung

<b>3</b>	<b>Spieltheorie</b>	81
3.1	Spiele in strategischer Normalform	82
3.2	Spiele ohne Annahmen über den Gegner	84
3.3	Reaktionsabbildungen	85
3.4	Dominante Strategien	86
3.5	Nash-Gleichgewichte	88
3.6	Gemischte Strategien	89
3.7	Ausblick	90
<b>4</b>	<b>Gruppenentscheidungen</b>	93
4.1	Individualpräferenzen und Gruppenentscheidungen	94
4.2	Beispiele für Entscheidungsverfahren	97
4.3	Bedingungen an Auswahlfunktionen, Satz von Arrow	100
<b>5</b>	<b>Zeitpläne</b>	105
5.1	Prozess-Scheduling (deterministisch)	107
5.2	Prozess-Scheduling (stochastisch)	112
5.3	Job-Shop-Probleme	117
5.4	Weitere Zeitplanprobleme	122
<b>6</b>	<b>Wiener-Prozesse</b>	125
6.1	Vom Bernoulli-Experiment zur Normalverteilung	126
6.2	Normalverteilte Einflussgrößen	128
6.3	Wiener-Prozesse	129
6.4	Anwendung: Entwicklung von Geldanlagen	133

## Teil II Verkehr auf Highways und Datenhighways: Einmal durch die Simulationspipeline

<b>7</b>	<b>Makroskopische Simulation von Straßenverkehr</b>	141
7.1	Modellansatz	142
7.2	Homogene Verkehrsströmung	144
7.2.1	Ein erstes Ergebnis	144
7.2.2	Geschwindigkeit, Fluss und Dichte	145
7.2.3	Fundamentaldiagramm	146
7.2.4	Modellverfeinerungen	147
7.3	Inhomogene Verkehrsströmung	150

---

7.4	Simulation einer einfachen Ringstraße . . . . .	152
7.4.1	Ein erster Versuch . . . . .	152
7.4.2	Eine verbesserte Simulation . . . . .	155
7.5	Signal- und Verkehrsgeschwindigkeit . . . . .	156
7.6	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Mikroskopische Simulation von Straßenverkehr . . . . .</b>	<b>163</b>
8.1	Modellansatz . . . . .	164
8.1.1	Zelluläre Automaten . . . . .	164
8.1.2	Straßenverkehr . . . . .	166
8.2	Eine erste Simulation . . . . .	169
8.3	Stochastische Erweiterung: Trödelfaktor . . . . .	170
8.3.1	Freier Verkehrsfluss . . . . .	171
8.3.2	Höhere Dichten, Staus aus dem Nichts . . . . .	172
8.3.3	Validierung und Kalibrierung: Fundamentaldiagramm . . . . .	175
8.4	Modellierung von Verkehrsnetzen . . . . .	178
8.4.1	Verkehrsgraph . . . . .	178
8.4.2	Kreuzungen . . . . .	180
8.4.3	Pläne und Vorhaben . . . . .	184
8.5	Modellverfeinerungen . . . . .	190
8.6	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Stochastische Verkehrssimulation . . . . .</b>	<b>193</b>
9.1	Modellansatz . . . . .	195
9.2	Wartesysteme . . . . .	196
9.2.1	Stochastische Prozesse . . . . .	197
9.2.2	Klassifizierung elementarer Wartesysteme . . . . .	203
9.2.3	Beispiele zur Kendall-Notation . . . . .	204
9.2.4	Leistungskenngrößen und erste Ergebnisse . . . . .	205
9.3	Warteschlangennetze . . . . .	208
9.3.1	Parameter in Warteschlangennetzen . . . . .	209
9.3.2	Asymptotische Analyse . . . . .	210
9.4	Analyse und Simulation . . . . .	212
9.4.1	Markov-Prozesse und Markov-Ketten . . . . .	213
9.4.2	Wartesysteme . . . . .	219
9.4.3	Warteschlangennetze . . . . .	223
9.4.4	Simulation . . . . .	224
9.5	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	226

### Teil III Dynamische Systeme: Ursache, Wirkung und Wechselwirkung

<b>10</b>	<b>Populationsdynamik</b> . . . . .	231
10.1	Modell von Malthus . . . . .	232
10.2	Verfeinerte Ein-Spezies-Modelle . . . . .	233
10.2.1	Lineares Modell mit Sättigung . . . . .	233
10.2.2	Logistisches Wachstum . . . . .	234
10.3	Zwei-Spezies-Modelle . . . . .	236
10.4	Ein diskretes Ein-Spezies-Modell . . . . .	240
<b>11</b>	<b>Regelung</b> . . . . .	245
11.1	Regelungstechnische Grundlagen . . . . .	246
11.1.1	Regelkreis . . . . .	247
11.1.2	Beschreibung linearer dynamischer Systeme . . . . .	248
11.1.3	Anforderungen an den Regler . . . . .	248
11.1.4	PID-Regler . . . . .	249
11.2	Exemplarische Modellierung eines Mehrkörpersystems . . . . .	251
11.2.1	Linearisiertes Modell mit Impuls- und Drallsatz . . . . .	252
11.2.2	Vollständiges Modell mit Lagrange-Gleichungen . . . . .	255
11.2.3	Simulation des Pendels . . . . .	259
11.3	Fuzzy-Mengenlehre . . . . .	259
11.3.1	Zugehörigkeit zu Fuzzy-Mengen . . . . .	260
11.3.2	Operationen mit Fuzzy-Mengen . . . . .	262
11.3.3	Linguistische Variablen . . . . .	264
11.3.4	Fuzzy-Logik . . . . .	265
11.4	Regelbasiertes Fuzzy-System . . . . .	268
11.4.1	Fuzzifizierung . . . . .	269
11.4.2	Inferenz . . . . .	270
11.4.3	Defuzzifizierung . . . . .	271
11.4.4	Beispiel . . . . .	271
11.5	Fuzzy-Regelung des invertierten Pendels . . . . .	271
11.5.1	Parameter und Randbedingungen . . . . .	272
11.5.2	Aufschwingen des Pendels . . . . .	273
11.5.3	Stabilisieren des Pendels . . . . .	275
11.6	Ausblick . . . . .	276
<b>12</b>	<b>Chaostheorie</b> . . . . .	279
12.1	Einleitung . . . . .	280
12.2	Von der Ordnung zum Chaos . . . . .	281
12.2.1	Logistische Abbildung und deren Fixpunkte . . . . .	281
12.2.2	Numerische Untersuchung und Bifurkationen . . . . .	283
12.2.3	Übergang ins Chaos . . . . .	286

12.3	Seltsame Attraktoren . . . . .	288
12.3.1	Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension . . . . .	289
12.3.2	Hénon-Abbildung . . . . .	291
12.3.3	Allgemeine zweidimensionale quadratische Abbildung . . . . .	292
12.4	Chaotisches Verhalten eines angetriebenen Pendels . . . . .	295
12.4.1	Modell des Pendels . . . . .	296
12.4.2	Diskretisierung . . . . .	297
12.4.3	Zyklen und Attraktoren . . . . .	298

## Teil IV Physik im Rechner: Aufbruch zum Zahlenfressen

13	<b>Molekulardynamik</b> . . . . .	305
13.1	Modellierung von Molekülen und Wechselwirkungen . . . . .	306
13.1.1	Fundamentale physikalische Kräfte . . . . .	307
13.1.2	Potenziale für ungeladene Atome . . . . .	307
13.1.3	Berechnung der auf ein Atom einwirkenden Kraft . . . . .	311
13.2	Bewegungsgleichung und deren Lösung . . . . .	312
13.2.1	Bewegungsgleichung . . . . .	312
13.2.2	Euler-Verfahren . . . . .	313
13.2.3	Velocity-Störmer-Verlet . . . . .	313
13.2.4	Bemerkungen . . . . .	315
13.3	Simulationsgebiet . . . . .	316
13.3.1	NVT-Ensemble . . . . .	316
13.3.2	Randbedingungen . . . . .	317
13.4	Implementierung . . . . .	318
13.4.1	Linked-Cells-Datenstruktur . . . . .	319
13.5	Parallelisierung . . . . .	321
13.6	Ausblick . . . . .	323
14	<b>Wärmeleitung</b> . . . . .	325
14.1	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	326
14.1.1	Anzahl an Dimensionen . . . . .	328
14.2	Diskretisierung . . . . .	329
14.2.1	3-Punkte-Stern . . . . .	330
14.2.2	5-Punkte-Stern . . . . .	332
14.2.3	Randbehandlung . . . . .	334
14.3	Numerische Lösung der PDE . . . . .	334
14.3.1	Einfache Relaxationsverfahren . . . . .	335
14.3.2	Mehrgitterverfahren . . . . .	336

<b>15</b>	<b>Strömungsmechanik</b> . . . . .	<b>343</b>
15.1	Fluide und Strömungen . . . . .	344
15.2	Mathematisches Modell . . . . .	346
15.2.1	Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	346
15.2.2	Anmerkungen zur Herleitung . . . . .	348
15.3	Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	349
15.3.1	Finite Differenzen . . . . .	349
15.3.2	Behandlung der Ortsableitungen . . . . .	350
15.3.3	Behandlung der Zeitableitungen . . . . .	351
15.3.4	Behandlung der Randbedingungen . . . . .	351
15.4	Numerische Lösung der diskretisierten Gleichungen . . . . .	353
15.4.1	Zeitschritt . . . . .	353
15.4.2	Ortsdiskrete Impulsgleichungen . . . . .	354
15.4.3	Ortsdiskrete Poisson-Gleichung für den Druck . . . . .	355
15.4.4	Zur Stabilität . . . . .	355
15.5	Anwendungsbeispiel: Umströmung eines Hindernisses . . . . .	356
15.6	Ausblick . . . . .	357
15.6.1	Aufgabenstellungen und Modelle . . . . .	357
15.6.2	Diskretisierungen . . . . .	359
15.7	Anhang: Kleiner Exkurs zur Gittergenerierung . . . . .	359
15.7.1	Strukturierte Gitter . . . . .	360
15.7.2	Unstrukturierte Gitter . . . . .	364
15.7.3	Ansätze zur Behandlung veränderlicher Geometrien . . . . .	366
<b>16</b>	<b>Globale Beleuchtung in der Computergraphik</b> . . . . .	<b>369</b>
16.1	Größen aus der Radiometrie . . . . .	370
16.2	Die Rendering-Gleichung . . . . .	372
16.3	Techniken zur Lösung der Rendering-Gleichung . . . . .	375
16.3.1	Ray-Tracing . . . . .	375
16.3.2	Path-Tracing . . . . .	377
16.3.3	Weitere Ray-Tracing-Derivate . . . . .	378
16.4	Das Radiosity-Verfahren . . . . .	380
16.4.1	Grundprinzip . . . . .	380
16.4.2	Berechnung der Formfaktoren . . . . .	381
16.4.3	Lösung der Radiosity-Gleichung . . . . .	384
16.4.4	Anmerkungen und Verbesserungen . . . . .	385
	<b>Abschließende Bemerkungen</b> . . . . .	<b>389</b>
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>391</b>
	<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	<b>395</b>