
Inhaltsverzeichnis

Verwendete Bezeichnungen	XIX
1 Physikalisch-heuristische Einleitung	1
1.1 Systeme von Massenpunkten	1
1.2 Durchbiegung eines elastischen Stabes	3
1.3 Greensche Funktion als Operatorinverses	10
1.4 Der boltzmannsche Stoßoperator	12
2 Abstrakte Räume	19
2.1 Der lineare Raum	20
2.1.1 Begriffsbildung und einfache Eigenschaften	20
2.1.2 Beispiele linearer Räume	21
2.2 Der metrische Raum	24
2.2.1 Begriffsbildung und einfache Eigenschaften	24
2.2.2 Beispiele metrischer Räume	25
2.3 Der normierte Raum	27
2.3.1 Begriffsbildung und einfache Eigenschaften	27
2.3.2 Beispiele normierter Räume	29
2.4 Der unitäre Raum	31
2.4.1 Begriffsbildung und einfache Eigenschaften	31
2.4.2 Beispiele unitärer Räume	34
2.4.3 Orthogonalität	43
2.5 Konvergenz und Vollständigkeit	44
2.5.1 Begriffsbildung und einfache Eigenschaften	44
2.5.2 Beispiele	46
2.5.3 Beschränktheit und Stetigkeit	49
2.5.4 Vervollständigung	51
2.6 Banach- und Hilberträume	54
2.6.1 Definitionen	54
2.6.2 Beispiele für Banachräume	54

	2.6.3	Beispiele für Hilberträume	55
	2.6.4	Anhang: Die Räume \mathcal{L}_p, l_p	56
2.7		Der Dimensionsbegriff in unitären Räumen	58
	2.7.1	Vollständige Orthonormalsysteme	58
	2.7.2	Dimension	62
	2.7.3	Beispiele	65
2.8		Separable Räume	65
2.9		Kompaktheit	68
2.10		Projektionen	69
	2.10.1	Orthogonalzerlegung und Orthogonalprojektion	70
	2.10.2	Direkte Summe und Projektion in linearen Räumen	72
	2.10.3	Direkte Summe in bzw. von Hilberträumen	74
2.11		Produktraum	76
2.12		Tabelle der Räume	77
3		Der Funktionenraum L_2	81
	3.1	Definition des \mathcal{L}_2	81
	3.2	In \mathcal{L}_2 dichte Funktionenklassen	81
	3.3	Vollständige Orthonormalsysteme in \mathcal{L}_2	87
	3.3.1	Polynom-verwandte Systeme	87
	3.3.2	Trigonometrische Funktionen	88
	3.4	Fourierreihen	91
	3.5	Fourierintegral	92
	3.6	Laplace-Transformation	99
4		Operatoren in abstrakten Räumen	103
	4.1	Definition des Begriffs Operator	103
	4.2	Rechenregeln für Operatoren	104
	4.3	Der banachsche Fixpunktsatz als einfache Anwendung	107
	4.4	Der inverse Operator	108
	4.5	Beschränkte Operatoren; Operatornorm	110
	4.6	Stetige Operatoren	111
	4.7	Abgeschlossene Operatoren	112
5		Lineare Operatoren in Banachräumen	117
	5.1	Beschränktheit und Stetigkeit	117
	5.2	Beispiele: Multiplikations- und Differentiationsoperatoren	118
	5.2.1	Multiplikation mit \mathbf{x}	119
	5.2.2	Die Operationsvorschrift der Differentiation, $\frac{d}{dx}$	119
	5.3	Abschließbarkeit beschränkter Operatoren	123

5.4	Linear-beschränkte Operatoren	125
5.4.1	Einfache Eigenschaften	125
5.4.2	Der Banachraum der linear-beschränkten Operatoren	127
5.4.3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit von Banach und Steinhaus	128
5.5	Vertauschungsrelationen zwischen linearen Operatoren	130
5.6	Kriterien für Linear-Beschränktheit	131
6	Lineare Funktionale	135
6.1	Definition linear-stetiger Funktionale	135
6.2	Beispiele	136
6.3	Rieszscher Darstellungssatz linear-stetiger Funktionale im Hilbertraum	140
6.4	Duale Räume	141
6.5	Fortsetzung linear-stetiger Funktionale	144
7	Distributionen	147
7.1	Definition der Distributionen als linear-stetige Funktionale	147
7.2	Distributionen als Limes stetiger Funktionen	149
7.3	Die δ -Funktion	152
7.4	Distributionen als Ableitung einer stetigen Funktion	155
7.5	Differentiation von Distributionen	157
7.6	Integration von Distributionen	160
7.7	Produktbildungen bei Distributionen	162
7.8	Fouriertransformation von Distributionen	164
7.9	Operatorwertige Distributionen	166
7.10	Gelfandsche Raumtripel	168
8	Funktionalableitung	173
8.1	Physikalische Bedeutung	173
8.2	Definition der Funktionalableitung	175
8.3	Beispiele	176
8.4	Die Richtungsableitung von Operatoren	179
8.5	Rechenregeln für die Funktionalableitung	182
8.5.1	Höhere Ableitungen	182
8.5.2	Kettenregel und Produktregel	182
8.5.3	Mittelwertsatz und Taylorentwicklung	183
9	Die verschiedenen Konvergenzbegriffe	187
9.1	Konvergenzbegriffe für Elemente aus allgemeinen Räumen	187
9.1.1	Definitionen der starken und schwachen Konvergenz	187
9.1.2	Konvergenzkriterien	189
9.1.3	Ergänzungen	190

9.2	Konvergenzbegriffe für Operatoren	191
9.2.1	Definition der drei Konvergenztypen	191
9.2.2	Konvergenzkriterien	193
9.2.3	Ergänzungen	193
9.3	Vektorwertige und operatorwertige Funktionen	194
9.4	Schwache Kompaktheit	196
9.5	Zusammenfassung für den Hilbertraum	198
10	Linear-beschränkte Operatoren im Hilbertraum	199
10.1	Der adjungierte Operator	199
10.1.1	Definition	199
10.1.2	Eigenschaften der Adjunktion	202
10.2	Selbstadjungiert-beschränkte Operatoren	204
10.3	Projektoren	209
10.4	Unitäre Operatoren	211
10.5	Isometrische Operatoren	214
10.6	Unitär-Äquivalenz	217
10.7	Partiell-isometrische Operatoren	218
10.8	Antiunitäre Operatoren	219
10.9	Satz von Wigner über die mathematische Realisierung von Strahlabbildungen	222
10.10	Matrixdarstellung	226
10.10.1	Matrixdarstellung linear-beschränkter Operatoren	226
10.10.2	Rechenregeln für die Matrixdarstellung	228
10.10.3	Kriterien für die Linear-Beschränktheit einer Matrix	229
11	Vollstetige Operatoren	231
11.1	Definitionen vollstetiger Operatoren	231
11.2	Eigenschaften von und Umgang mit vollstetigen Operatoren	234
11.3	Beispiele vollstetiger Operatoren	236
11.4	Der Hilbertraum der Hilbert-Schmidt-Operatoren	238
12	Das Eigenwertproblem bei vollstetigen Operatoren	243
12.1	Rückblick auf das Eigenwertproblem im unitären \mathbb{R}^n	243
12.2	Beliebige vollstetige Operatoren im Hilbertraum	244
12.3	Vollstetige, selbstadjungierte Operatoren und das ritzsche Variationsprinzip	246
12.4	Die kanonische Darstellung vollstetiger Operatoren	249
12.5	Lösung inhomogener Gleichungen und die fredholmsche Alternative	251
13	Spektraldarstellung selbstadjungiert-beschränkter Operatoren	253
13.1	Spektraldarstellung vollstetiger Operatoren	253
13.2	Spektraldarstellung des Multiplikationsoperators	255

13.3	Der hilbertsche Spektralsatz	256
13.4	Rechenregeln für die Spektraldarstellung	258
14	Spektrum und Resolvente linearer Operatoren	261
14.1	Die Resolvente eines linearen Operators	261
14.2	Die Einteilung der komplexen Ebene nach den Eigenschaften der Resolvente	263
14.3	Beispiele	265
14.4	Das Spektrum vollstetiger Operatoren	266
14.5	Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren	267
14.6	Spektrum und Spektralschar eines selbstadjungierten Operators	270
14.7	Die Resolvente als holomorphe Funktion	272
14.8	Spektraldarstellung der Resolvente und stieltjessche Umkehrformel . .	274
14.9	Operatoren mit vollstetiger Resolvente	276
15	Entwicklung nach eigentlichen und uneigentlichen Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators	277
15.1	Eigenvektoren und uneigentliche Eigenvektoren	277
15.2	Entartung des Spektrums	280
15.3	Zerlegung des Hilbertraumes nach der Spektralschar	281
15.4	Entwicklung eines selbstadjungierten Operators mit einfachem, nicht-diskretem Spektrum nach uneigentlichen Eigenvektoren	282
15.5	Abhängigkeit der A -Darstellung vom erzeugenden zyklischen Vektor .	286
15.6	Die Wirkung von Operatoren im uneigentlichen v. o. n. S.	289
15.7	A -Darstellung bei nicht-einfachem Spektrum	290
15.8	Uneigentliche Eigenvektoren als Eigenfunktionale im gelfandschen Raumtripel	291
15.9	Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren: Zusammenfassung . . .	294
16	Nicht-beschränkte lineare Operatoren	297
16.1	Der adjungierte Operator	297
16.1.1	Definition des adjungierten Operators	297
16.1.2	Eigenschaften des adjungierten Operators	299
16.1.3	Beispiele adjungierter Operatoren	301
16.1.4	Der Operatorgraph des adjungierten Operators	302
16.2	Symmetrische Operatoren	303
16.3	Selbstadjungierte Operatoren	306
16.4	Die Cayley-Transformierte	307
16.5	Erweiterung symmetrischer Operatoren	309
16.6	Kriterien für Selbstadjungiertheit; Stabilität der Selbstadjungiertheit gegen Störungen	310
16.7	Stabilität des Spektrums gegen Störungen	312

17	Physikalische Beispiele nicht-beschränkter Operatoren	315
17.1	Der Ortsoperator	315
17.2	Der Impulsoperator	316
17.2.1	p im endlichen Intervall	316
17.2.2	p im halbseitig unendlichen Intervall	318
17.2.3	p in $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$	318
17.3	Schrödingeroperatoren	318
17.3.1	Der Laplace-Operator im R^3	318
17.3.2	Teilchen im Potentialfeld	320
18	Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren	323
18.1	Der Spektralsatz	323
18.2	Vertauschbare Operatoren	326
18.3	Die Spur und ihre Eigenschaften	329
	Literatur	333
	Sachverzeichnis	337