

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Vorwort</b> .....   | <b>5</b>  |
| <b>I Die Wirklichkeit geometrisieren: Graphentheorie</b> .....                             | <b>7</b>  |
| 1 Einleitung .....   | 7         |
| 2 Einige grundlegende Definitionen .....   | 10        |
| 3 Durchlaufbarkeit von Graphen .....   | 15        |
| 3.1 Der Eulersche Satz .....   | 15        |
| 3.2 Wann existiert in einem Graphen wenigstens ein Bogenkreis?<br>.....                    | 20        |
| 3.3 Wann enthalten alle Bogenkreise eines Graphen geradzahlig<br>viele Bögen? .....        | 22        |
| 3.4 Ein einfaches Färbungsproblem .....  | 28        |
| 4 Die Eulersche Formel .....   | 32        |
| 5 Plättbarkeit von Graphen .....   | 38        |
| 5.1 Das Problem .....  | 38        |
| 5.2 Begriffsbildungen .....  | 39        |
| 5.3 Der Satz von Kuratowski .....  | 42        |
| 6 Ausgewählte Probleme .....   | 45        |
| 6.1 Die Anzahl der Bögen in einem vollständigen Graphen .....                              | 45        |
| 6.2 Wie viele Knoten ungerader Ordnung gibt es in beliebigen<br>Graphen? .....             | 48        |
| 6.3 Das Königsberger Brückenproblem .....  | 50        |
| 7 Hamiltonsche Bogenzüge .....   | 52        |
| 8 Färbungsprobleme .....   | 58        |
| 8.1 Das Vierfarbenproblem .....  | 58        |
| 8.2 Ein Zweifarbensatz .....   | 62        |
| 8.3 Verallgemeinerung des Zweifarbensatzes .....   | 65        |
| 8.4 Der Sechsfarbensatz .....  | 69        |
| <b>II Die Welt ausmessen</b> .....   | <b>71</b> |
| 1 Einleitung .....   | 71        |
| 2 Längenmessung .....  | 72        |
| 2.1 Die Länge einer „krummen Linie“ .....  | 72        |
| 2.2 Die Länge von Streckenzügen .....  | 74        |
| 2.3 Strecken irrationaler Länge: die Länge der Diagonalen eines<br>Einheitsquadrates ..... | 77        |
| 3 Flächenmessung .....   | 78        |
| 3.1 Flächeninhalt von Rechtecken .....   | 78        |
| 3.2 Flächeninhalt beliebiger ebener Figuren .....  | 82        |
| 3.3 Flächeninhalt von Parallelogrammen .....   | 82        |
| 3.4 Flächeninhalt von Dreiecken .....  | 83        |
| 3.5 Flächeninhalt von Einheitskreisen: Die Kreiszahl $\pi$ .....                           | 84        |
| 3.6 Vergrößern und Verkleinern .....   | 87        |
| 3.7 Eigenschaften der zentrischen Streckung .....  | 88        |
| 3.8 Längen- und Flächenverhältnisse bei zentrischer Streckung .....                        | 91        |
| 4 Umfang und Flächeninhalt von Kreisen .....   | 93        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 4.1        | Umfang des Einheitskreises .....  | 93         |
| 4.2        | Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius $r$ cm .....                               | 94         |
| 4.3        | Umfang des Kreises mit dem Radius $r$ cm .....                                      | 95         |
| 4.4        | Eine Alternative zur Bestimmung des Kreisumfangs aus der<br>Kreisfläche .....       | 95         |
| 4.5        | Probleme mit Umfang und Flächeninhalt geschlossener<br>Figuren .....                | 96         |
| 5          | Volumenbestimmung .....   | 98         |
| 5.1        | Quadervolumen .....   | 98         |
| 5.2        | Gerade Zylinder .....   | 99         |
| 5.3        | Pyramiden .....   | 101        |
| <b>III</b> | <b>Den Raum erkunden .....</b>  | <b>105</b> |
| 1          | Einleitung .....  | 105        |
| 2          | Abwicklungen von Körpern (Netze) .....  | 106        |
| 2.1        | Würfel .....  | 106        |
| 2.2        | Pyramiden mit quadratischer Grundfläche .....                                       | 113        |
| 3          | Faltmodelle .....   | 115        |
| 3.1        | Pyramiden .....   | 115        |
| 3.2        | Berechnungen am Kegel .....   | 120        |
| 4          | Schulung der Raumvorstellung .....  | 122        |
| <b>IV</b>  | <b>Die Welt nachbauen: Faltmodelle verschiedener Haus- und<br/>Dachformen .....</b> | <b>127</b> |
| 1          | Das Spitzgiebeldach .....   | 127        |
| 2          | Das Walmdach .....  | 131        |
| 3          | Dreitafelprojektion .....   | 134        |
| 4          | Kavalierperspektive und Militärperspektive .....                                    | 137        |
| 4.1        | Kavalierperspektive .....   | 137        |
| 4.2        | Kavalierperspektive eines Walmdachhauses .....                                      | 140        |
| 4.3        | Eine alternative Zeichnung in Kavalierperspektive .....                             | 141        |
| 5          | Militärperspektive .....  | 142        |
| 6          | Das Haus mit L-förmigem Grundriss .....   | 143        |
| 7          | Dachausbauten .....   | 146        |
| 7.1        | Satteldachgaube .....   | 146        |
| 7.2        | Walmdachgaube .....   | 147        |
| 7.3        | Schleppgaube und Krüppelwalm .....  | 148        |
| <b>V</b>   | <b>Die Geometrie strukturieren: Deckabbildungen und<br/>Symmetrien .....</b>        | <b>151</b> |
| 1          | Einleitung .....  | 151        |
| 2          | Deckdrehungen von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten ..                         | 152        |
| 3          | Die Deckabbildungen der regelmäßigen Figuren .....                                  | 155        |
| 3.1        | Das gleichseitige Dreieck .....   | 155        |
| 3.2        | Die Deckabbildungen des regelmäßigen Sechsecks .....                                | 156        |
| 4          | Der Begriff der Gruppe .....  | 162        |
| 5          | Deckabbildungen und Gruppentheorie .....  | 167        |
| 6          | Symmetrien – Das Haus der Vierecke .....  | 170        |
| 7          | Die Deckabbildungen der Ebene .....   | 174        |

|   |            |
|---|------------|
| 7.1 Die Spiegelung .....  | 174        |
| 7.2 Die Drehung .....   | 175        |
| 7.3 Die Punktspiegelung .....   | 178        |
| 7.4 Die Parallelverschiebung.....   | 179        |
| 7.5 Die Schubspiegelung.....  | 180        |
| <b>VI Die Ästhetik strukturieren: Bandornamente und<br/>Parkettierung .....</b> | <b>181</b> |
| 1 Bandornamente.....  | 181        |
| 2 Die Deckabbildungsgruppe von Bandornamenten.....                              | 184        |
| 2.1 Ein einfaches Ornament .....  | 185        |
| 2.2 Ein achsen- und verschiebungssymmetrisches Ornament ...                     | 185        |
| 3 Parkettierungen.....  | 189        |
| 3.1 Erste Begriffsbildungen und Beispiele.....                                  | 189        |
| 3.2 Einfache Parkettierungen .....  | 192        |
| 3.3 Knabbertechnik .....  | 197        |
| 3.4 Parkettierungen mit mehreren Ausgangsfiguren.....                           | 198        |
| <b>Anhang .....</b>   | <b>203</b> |
| A Lösungen zu den Aufgaben.....   | 203        |
| A.1 Kapitel I.....  | 203        |
| A.2 Kapitel II.....   | 211        |
| A.3 Kapitel III .....   | 214        |
| A.4 Kapitel V .....   | 215        |
| A.5 Kapitel VI.....   | 220        |
| <b>Literaturverzeichnis.....</b>  | <b>225</b> |
| <b>Index .....</b>  | <b>227</b> |
| <b>Liste der verwendeten Symbole .....</b>                                      | <b>231</b> |