

# Inhaltsverzeichnis

1. Was ist Mathematik?	1
2. Das abstrakte Universum der Mathematik	3
2.1. Das mathematische Universum besteht aus gedachten Gegenständen.	3
2.2. Gedachte Vorgänge können auf gedachte Gegenstände angewendet werden.	4
2.3. Gedachte Beziehungen können auf gedachte Gegenstände angewendet werden.	5
3. Die Sprache der Mathematik	7
3.1. Die Rolle der Sprache	7
3.2. Die Begriffe der Mathematik und ihre Bedeutung	7
3.3. Das Konzept der freien Variablen	9
3.4. Terme und ihre Bedeutung	10
3.5. Atomare Aussagen und ihre Bedeutung	14
3.6. Junktoraussagen und ihre Bedeutung	17
3.7. Quantoraussagen und ihre Bedeutung	19
3.8. Mathematische Sprachkultur	21
4. Die Rolle von Bildern in der Mathematik	23
5. Beweisen	25
5.1. Grundbegriffe und Axiome	25
5.2. Vermehrung der Wissensbasis	26
5.3. Definitionen als Sonderfall von Axiomen	27
5.4. Schließen	31
5.5. Was ist ein Beweis?	33
6. Rechnen ist Beweisen	35
6.1. Die Regeln für Gleichungen	35
6.2. Die Einsetzungsregel	36
6.3. Die Ersetzungsregeln	37
6.4. Beispiele zum Rechnen	38
7. Problemlösen mit Formeln	43
7.1. Was ist eine Formel?	43
7.2. Was ist ein Problem?	44
7.3. Das algorithmische Sprachmittel der Wertzuweisung	46
7.4. Problemlösen durch Äquivalenzumformung (Formelumstellung)	47
7.5. Lineare Gleichungen	51

<b>8. Schnellsiederkurs für rationale Zahlen</b>	<b>55</b>
8.1. Wozu braucht man rationale Zahlen?	55
8.2. Die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen	55
8.3. Der Divisionsalgorithmus für natürliche Zahlen	57
8.4. Die Bruchdarstellung rationaler Zahlen	59
8.5. Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen	59
8.6. Umrechnung der Darstellungen	62
8.7. Verhältnisse und Proportionen	63
8.8. Termdefinierte Funktionen und Wertetabelle	65
8.9. Größen und ihre gegenseitige Abhängigkeit	67
8.10. Direkte und indirekte Proportionalität und "Schlussrechnung"	68
8.11. Die so genannte Prozentrechnung	71
8.12. Wo endet die Beschreibungskraft der rationalen Zahlen?	76
<b>9. Ein Ausblick auf die reellen Zahlen</b>	<b>81</b>
9.1. Messen in der realen Welt und im Universum der Mathematik	81
9.2. Die Dezimaldarstellung der irrationalen Zahlen	83
9.3. Streiflichter auf das sophistische Wesen der reellen Zahlen	84
<b>10. Die Reelle Cartesische Ebene</b>	<b>87</b>
10.1. Paarbildung	87
10.2. <i>Reelle Zahlenpaare sind auch Punkte.</i>	88
10.3. Funktionsgraphen reeller Funktionen und ihre Visualisierung	89
10.4. Umkehrfunktion und ihre Visualisierung	92
<b>11. Mengen</b>	<b>97</b>
11.1. Was ist eine Menge?	97
11.2. <i>Das aufzählende Verfahren</i>	101
11.3. <i>Das beschreibende Verfahren</i>	102
11.4. <i>Das erzeugende Verfahren</i>	107
11.5. <i>Durchschnitt und Vereinigung von Mengen</i>	110
<b>12. Der Wechsel zwischen einer Funktion und ihrem Graph</b>	<b>113</b>
12.1. <i>Definition des Konzepts "Funktionsgraph" in der Mengenlehre</i>	113
12.2. <i>Eine mögliche Vermeidung der Erweiterung von Sprachmitteln</i>	114
<b>13. Gerade in der Reellen Cartesischen Ebene</b>	<b>117</b>
13.1. <i>Euklidische Geometrie</i>	117
13.2. <i>Das Geheimnis der Ähnlichkeit</i>	118
13.3. <i>Analytische Geometrie</i>	119
13.4. <i>Beschreibung von vertikalen Geraden</i>	120

13.5. Beschreibung von nichtvertikalen Geraden	121
13.6. Parallele und aufeinander senkrechte Gerade	127
13.7. Lösen einer linearen Gleichung mit zwei Lösungsvariablen	128
<b>14. Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>131</b>
14.1. Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen in 2 Variablen	131
14.2. Lineare Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen in 3 Variablen	137
<b>15. Lineare Funktionen</b>	<b>139</b>
15.1. Nichtvertikale Gerade sind Graphen linearer Funktionen.	139
15.2. Eine charakteristische Eigenschaft linearer Funktionen	141
15.3. Linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen	143
<b>16. Lineare Ungleichungen mit einer Variablen</b>	<b>147</b>
<b>17. Der beweistechnische Umgang mit Quantoren</b>	<b>151</b>
17.1. Der beweistechnische Umgang mit dem Allquantor	151
17.2. Der beweistechnische Umgang mit dem Existenzquantor	153
<b>18. Der Nutzen einer Implikation und die Sprechweisen "notwendig" und "hinreichend"</b>	<b>155</b>
<b>19. Wie beweist man eine Implikation <math>A \Rightarrow B</math>?</b>	<b>161</b>
<b>20. Aussagenlogik</b>	<b>163</b>
20.1. Beweis von links nach rechts und von rechts nach links	163
20.2. Indirekter Beweis	164
20.3. Beweis durch Fallunterscheidung	165
20.4. Kontraposition	166
20.5. Die Regeln von De Morgan	167
20.6. Distributivität von $\wedge$ und $\vee$	168
<b>21. Beweisbeispiele</b>	<b>171</b>
<b>22. Erweiterte Mengenlehre</b>	<b>185</b>
22.1. Das Axiomensystem von Peano	185
22.2. Einstellige Relationen	187
22.3. Einbettung der Arithmetik in die Mengenlehre	189
<b>23. Induktive Definitionen</b>	<b>193</b>

<b>24. Induktionsbeweis</b>	<b>201</b>
<b>25. Ein Streiflicht auf Primzahlen</b>	<b>207</b>
25.1. Primfaktorenzerlegung	207
25.2. Die Beschreibung des Konzepts einer Folge	210
25.3. Eine Variante des Induktionsbeweises	211
25.4. Zählen und Anzahl	215
25.5. Die Primzahlfolge $p$	219
<b>26. Ein Ausblick auf die Analysis</b>	<b>225</b>
26.1. Was ist Analysis?	225
26.2. Der Grenzwert konvergenter Folgen	226
26.3. Rechenregeln für Grenzwerte	234
26.4. Beschränktheit und Monotonie	236
26.5. Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen	241
<b>Index</b>	<b>253</b>