

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete durch Lösung von Integralgleichungen mit Neumannschem Kern

| | |
|---|----|
| § 1. Vorbemerkungen | 1 |
| 1.1. Geometrische Vorbemerkungen und Bezeichnungen | 2 |
| a) Rektifizierbare und glatte Kurven | 2 |
| b) Bezeichnungen | 2 |
| c) Der Neumannsche Kern $K(s, t)$ | 3 |
| 1.2. Randwerte von Cauchy-Integralen | 4 |
| § 2. Aufstellung der Integralgleichungen | 6 |
| 2.1. Die Integralgleichung von LICHTENSTEIN | 6 |
| 2.2. Die Integralgleichung von GERSCHGORIN | 8 |
| 2.3. Die Integralgleichung von CARRIER | 9 |
| 2.4. Umformung von $\Phi(s)$ in der Integralgleichung von LICHTENSTEIN | 11 |
| 2.5. Integralgleichungen für Außengebiete | 12 |
| a) Der Punkt ∞ ist Fixpunkt | 12 |
| b) Der Punkt ∞ ist Bild eines endlichen Punktes | 13 |
| 2.6. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet | 14 |
| 2.7. Integralgleichungen für $\theta'(s)$ | 15 |
| a) Die Integralgleichung von BANIN | 15 |
| b) Die Integralgleichung von WARSCHAWSKI und STIEFEL | 16 |
| 2.8. Gebiete mit Ecken; Integralgleichung von ARBENZ | 16 |
| 2.9. Gebiete mit Ecken; Analogon zur Integralgleichung von LICHTENSTEIN | 19 |
| § 3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von § 2 | 21 |
| 3.1. Konvergenzaussagen mit Hilfe der Fredholmschen Theorie | 22 |
| a) Allgemeine Konvergenzaussagen | 22 |
| b) Gewinnung von Fehlerabschätzungen | 23 |
| 3.2. Konvexe Gebiete | 24 |
| 3.3. Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI | 27 |
| a) Eigenwerte und Eigenfunktionen von (3.9) | 27 |
| b) Einführung eines Hilbertraumes H und eines Operators T | 29 |
| c) Zwei Hilfssätze | 30 |
| d) Der Konvergenzbeweis | 32 |
| 3.4. Untersuchung der Ableitungen und der allgemeinen Integralgleichungen (3.1) | 33 |
| a) Konvergenz der Folge $\{\theta'_n(s)\}$ | 33 |
| b) Die Integralgleichungen (3.1) | 33 |
| c) Folgerungen für die Integralgleichungen von § 2 | 34 |
| 3.5. Abschätzungen für $ \lambda_2 $ | 36 |
| a) Abschätzungen für $ \lambda_2 $ durch geometrische Annahmen | 36 |
| b) Vergleichssätze | 37 |
| 3.6. Über die Stieltjes-Integralgleichungen aus 2.8 und 2.9 | 38 |

| | |
|--|----|
| § 4. Numerische Lösung verschiedener Integralgleichungen von § 2 | 39 |
| 4.1. Diskretisierung der Integralgleichung | 40 |
| a) Auffassung als Stieltjes-Integral | 40 |
| b) Auffassung als Riemann-Integral. | 41 |
| c) Diskretisierung der adjungierten Integralgleichung | 44 |
| 4.2. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung | 45 |
| a) Weitere Eigenschaften von $K(s, z)$ | 45 |
| b) Abschätzungen von $f'(s)$ und $f''(s)$ | 46 |
| c) Abschätzung des Quadraturfehlers | 48 |
| d) Abschätzung von $ f(s_i) - f_i $ | 49 |
| 4.3. Lösung des diskreten Problems; Konvergenzbeschleunigung | 52 |
| a) Direkte Methoden | 52 |
| b) Iterationsmethoden | 52 |
| 4.4. Bericht über numerische Experimente | 55 |
| § 5. Verschiedenes | 59 |
| 5.1. Methode der Störungsrechnung | 59 |
| 5.2. Weitere Methode zur Behandlung von Gebieten mit Ecken | 60 |
| Kapitel II. Das Verfahren von THEODORSEN zur konformen Abbildung von $z < 1$ auf ein Gebiet | |
| § 1. Die Theorie des Verfahrens von THEODORSEN | 61 |
| 1.1. Konjugierte Funktionen | 62 |
| a) Im Einheitskreis konjugierte Funktionen | 62 |
| b) Eigenschaften konjugierter Funktionen | 63 |
| 1.2. Die Integralgleichung von THEODORSEN | 64 |
| a) Ableitung der Integralgleichung | 64 |
| b) Bestimmung von $f(z)$ für $ z < 1$ | 65 |
| c) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Theodorsenschen In- tegralgleichung | 66 |
| 1.3. Iterative Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN. | 67 |
| a) Die Ungleichung von WARSCHAWSKI | 68 |
| b) Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI | 69 |
| 1.4. Zusätzliche Ergebnisse zum Theodorsen-Verfahren | 71 |
| a) Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit | 71 |
| b) Konvergenz der Ableitungen | 72 |
| c) Abschätzung von $ f_n(z) - f(z) $ | 72 |
| d) Sternigkeit der Kurven C_n | 73 |
| e) Die Bedingung $\varepsilon < 1$ | 73 |
| § 2. Über die Berechnung konjugierter Funktionen | 74 |
| 2.1. Die Methode von WITTICH | 74 |
| a) Ableitung der Formel. | 75 |
| b) Eigenschaften der Matrix \mathfrak{W} | 78 |

| | |
|---|-----|
| 2.2. Andere Methoden mit äquidistanten Knoten | 80 |
| a) Die Methode von THEODORSEN | 80 |
| b) Die Methode von NAIMAN | 82 |
| c) Die Methode von TIMMAN | 82 |
| d) Die Methode von MULTHOFF | 83 |
| e) Vergleich der Methoden | 83 |
| 2.3. Verwendung nicht äquidistanter Knoten | 84 |
| a) Die Formeln von FLÜGGE-LOTZ | 84 |
| b) Die Formeln von MUGGIA | 84 |
| § 3. Numerische Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN | 85 |
| 3.1. Diskretisierung der Integralgleichung | 85 |
| a) Ableitung der Vektorgleichung | 85 |
| b) Die Operatorgleichung (3.2) | 86 |
| c) Geometrische Deutung von $\tilde{\theta}(\varphi)$ | 87 |
| 3.2. Lösung des diskreten Problems nach dem Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren | 87 |
| a) Gesamtschrittverfahren | 87 |
| b) Einzelschrittverfahren | 89 |
| c) Mittelung beim Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren | 89 |
| 3.3. Lösung des diskreten Problems nach dem Newton-Verfahren | 90 |
| a) Durchführung eines Newton-Schrittes | 90 |
| b) Konvergenz des Newton-Verfahrens | 91 |
| 3.4. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung | 92 |
| a) Vorbemerkungen | 93 |
| b) Abschätzung des Fehlervektors \mathfrak{z} | 95 |
| c) Abschätzung von $\theta(\varphi) - \tilde{\theta}(\varphi)$ | 97 |
| d) Abschätzung von $\log \varrho(\theta(\varphi)) - T(\varphi)$ | 98 |
| 3.5. Bericht über numerische Experimente | 99 |
| a) Durchführung der Rechnung | 99 |
| b) Eine Versuchsreihe | 100 |
| c) Weitere Experimente | 104 |
| § 4. Verschiedene mit dem Theodorsen-Verfahren verwandte Abbildungsmethoden | 105 |
| 4.1. Das Verfahren von MATTHIEU, NEHARI und v. KÁRMÁN-TREFFTZ | 105 |
| a) Ableitung der Funktionalgleichung | 106 |
| b) Die erste Näherung | 106 |
| 4.2. Das Verfahren von KULISCH und MELENTJEW | 107 |
| a) Iterative Lösung von (4.1) | 107 |
| b) Das Verfahren von BERGSTRÖM | 109 |
| 4.3. Spezielle Verfahren zur Profilabbildung | 110 |
| a) Das Verfahren von TIMMAN | 110 |
| b) Das Verfahren von RIEGELS und WITTICH | 111 |
| 4.4. Das Verfahren von FRIBERG | 113 |
| 4.5. Störungsmethode von YOSHIKAWA | 114 |
| 4.6. Weitere Zitate | 115 |

Kapitel III. Approximation konformer Abbildungen durch Polynome mit Extremaleigenschaften

| | |
|--|-----|
| § 1. Zwei Minimalprobleme und ihre Lösung durch Ritz-Ansatz | 116 |
| 1.1. Vorbereitungen | 116 |
| a) Die Räume $L_2(G)$ und $L_2(C)$ | 116 |
| b) Die Greensche Formel | 118 |
| 1.2. Erstes Minimalproblem | 118 |
| 1.3. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem I | 120 |
| a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ | 121 |
| b) Gewinnung des Minimalpolynoms | 122 |
| c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ | 122 |
| 1.4. Zweites Minimalproblem | 125 |
| 1.5. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem II | 127 |
| a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ | 127 |
| b) Gewinnung des Minimalpolynoms | 128 |
| c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ | 128 |
| § 2. Die Verwendung orthogonaler Polynome zur konformen Abbildung | 131 |
| 2.1. Gewinnung der orthogonalen Polynome | 132 |
| a) Orthogonalisierungsverfahren von E. SCHMIDT | 132 |
| b) Gewinnung der $p_n(z)$ mit Hilfe von Determinanten | 132 |
| 2.2. Darstellung der Minimalpolynome $P_n(z)$ und der Kernfunktionen | 133 |
| 2.3. Das asymptotische Verhalten der $p_n(z)$ | 136 |
| a) Verhalten innerhalb C | 136 |
| b) Verhalten auf und außerhalb C | 136 |
| 2.4. Einige weitere Eigenschaften der Kernfunktionen | 139 |
| § 3. Numerische Gewinnung der Näherungspolynome | 140 |
| 3.1. Direkte Gewinnung der Minimalpolynome | 140 |
| 3.2. Durchführung des Orthonormierungsprozesses | 142 |
| a) Orthonormierungsprozeß für Vektoren | 142 |
| b) Verbesserung eines fast orthogonalen Vektors | 144 |
| c) Orthonormierungsprozeß für Funktionen | 145 |
| d) Gewinnung der Minimalpolynome $P_n(z)$ | 146 |
| e) Orthonormale harmonische Polynome | 147 |
| 3.3. Bericht über numerische Experimente | 147 |
| a) Orthonormale Polynome für das Einheitsquadrat | 147 |
| b) Die Versuche von DAVIS-RABINOWITZ und HOCHSTRASSER | 149 |
| c) Die Versuche von BERGMAN-HERRIOT | 150 |
| d) Weitere Versuche | 152 |
| e) Folgerungen | 153 |
| f) Zusatz: Bericht über eine neue Versuchsserie | 153 |

Kapitel IV. Weitere Methoden zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete

| | |
|---|-----|
| § 1. Konforme Abbildung eines Gebiets mit Hilfe harmonischer Interpolationspolynome | 154 |
| 1.1. Lösung des Dirichletschen Problems mit harmonischen Interpolationspolynomen | 155 |
| 1.2. Anwendung auf die konforme Abbildung. | 157 |
| 1.3. Bericht über numerische Experimente | 158 |
| 1.4. Modifikation des Verfahrens | 162 |
| § 2. Die Methoden von KANTOROWITSCH | 163 |
| 2.1. Methode der unendlichen, nichtlinearen Gleichungssysteme | 163 |
| 2.2. Störungsmethode von KANTOROWITSCH | 166 |
| 2.3. Konforme Abbildung von Gebiet auf Kreis | 168 |
| a) Methode der nichtlinearen Gleichungssysteme | 168 |
| b) Störungsmethode | 168 |
| § 3. Polygonabbildungen | 169 |
| 3.1. Die Schwarz-Christoffelschen Formeln; das Parameterproblem | 169 |
| 3.2. Weitere Methoden der Parameterbestimmung | 171 |
| a) Methode von AHLFORS | 171 |
| b) Methode von KUFAREV | 172 |
| c) Methode von BERGMAN | 172 |
| 3.3. Spezielle Polygonabbildungen | 173 |
| § 4. Sonstige Abbildungsverfahren | 173 |
| 4.1. Schmiegeungsverfahren | 173 |
| a) Abbildung auf den Einheitskreis | 173 |
| b) Abbildung auf die obere Halbebene. | 175 |
| 4.2. Die Methode der Extremalpunkte von LEJA | 177 |
| 4.3. Analogmethoden | 179 |
| a) Gegebene Funktion | 179 |
| b) Gegebenes Gebiet | 179 |

Kapitel V. Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete

| | |
|--|-----|
| § 1. Abbildung auf Normalgebiete | 181 |
| 1.1. Zusammenstellung der wichtigsten Normalgebiete. | 182 |
| 1.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring | 183 |
| § 2. Die Methode der Integralgleichungen mit Neumannschem Kern | 185 |
| 2.1. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet | 186 |
| a) Unendliches Gebiet | 186 |
| b) Endliches Gebiet. | 188 |

| | |
|---|-----|
| 2.2. Konforme Abbildung auf ein Radialschlitzgebiet | 190 |
| 2.3. Konforme Abbildung auf einen Kreisring | 190 |
| a) Ableitung der Integralgleichung | 191 |
| b) Bericht über ein numerisches Experiment | 191 |
| 2.4. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach ROYDEN | 192 |
| § 3. Erweiterung der Methode von THEODORSEN-GARRICK für Ringgebiete . . | 194 |
| 3.1. Vorbetrachtungen | 194 |
| a) Einige Hilfsfunktionen | 194 |
| b) Drei Operatoren in $L_2(-\pi, +\pi)$ | 195 |
| c) Das Dirichletsche Problem für den Kreisring. | 196 |
| 3.2. Das Integralgleichungspaar von GARRICK | 197 |
| a) Konjugierte Funktionen im Ring. | 197 |
| b) Ableitung der Integralgleichungen von GARRICK | 198 |
| c) Ermittlung von $f(z)$ für $z \in R$ | 199 |
| d) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen (3.13) und (3.14) | 200 |
| 3.3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von GARRICK | 202 |
| a) Aufstellung der Iterationen; Konvergenzsatz | 202 |
| b) Beweis des Konvergenzsatzes | 203 |
| 3.4. Bericht über numerische Experimente. | 206 |
| § 4. Funktionentheoretische Iterationsverfahren | 208 |
| 4.1. Vorbereitende Sätze und Definitionen | 208 |
| a) Verzerrungssatz für Kreisringabbildungen | 208 |
| b) Zwei Abschätzungen für Ringgebiete | 211 |
| c) Spiegelung von Gebieten | 212 |
| 4.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach KOMATU | 214 |
| a) Angabe des Verfahrens | 214 |
| b) Konvergenz und Fehlerabschätzung | 215 |
| c) Die Form der Kurven C_m | 217 |
| 4.3. Variationen des Verfahrens von KOMATU. | 218 |
| a) Variation des Verfahrens nach HÜBNER | 218 |
| b) Variation des Verfahrens nach LANDAU | 220 |
| c) Faktorisierung der Kreisringabbildung | 220 |
| d) Schmiegunungsverfahren | 221 |
| 4.4. Numerische Durchführung des Verfahrens von KOMATU an einem Bei- spiel | 222 |
| a) Ausgangsgebiet G_0 und exakte Kreisringabbildung | 222 |
| b) Anwendung des Komatu-Verfahrens auf das Gebiet G_0 | 224 |
| 4.5. Konforme Abbildung auf ein Vollkreisgebiet | 229 |
| a) Schilderung der beiden Koebeschen Verfahren | 229 |
| b) Konvergenz der Verfahren | 230 |

c) Faktorisierung der Vollkreisabbildung 232
 d) Bericht über ein Experiment 233

4.6. Konforme Abbildung auf Schlitz- und Lemniskatengebiete 235
 a) Iterationsverfahren zur Gewinnung der ϑ -Schlitzabbildung . . . 235
 b) Konvergenz des Verfahrens 236
 c) Konforme Abbildung auf Lemniskatengebiete 238
 d) Zusatz: Faktorisierung und iterative Gewinnung beliebiger
 schlichter Funktionen 240

§ 5. Verschiedene weitere Methoden zur konformen Abbildung mehrfach zu-
 sammenhängender Gebiete. 241

5.1. Konforme Abbildung auf Normalgebiete mit Hilfe von Orthonormal-
 systemen oder der Bergmanschen Kernfunktion 241

5.2. Konforme Abbildung auf Normalgebiete durch Lösung von Extremal-
 problemen mit direkten Methoden 245
 a) Allgemeines Minimumproblem, seine Lösung durch Ritz-Ansatz . 245
 b) Approximation der Kernfunktion über ein Minimalproblem . . . 248
 c) Approximation von $\varphi_{\vartheta}(z)$ über ein Minimalproblem. 248

5.3. Konforme Abbildung eines Ringgebiets auf einen Kreisring durch
 Lösung von Extremalproblemen 249
 a) Verwendung der Methode von 5.2,a) 249
 b) Extremalprobleme von KHAJALIA 251

5.4. Übertragung der Methoden von KANTOROWITSCH 253

5.5. Sonstige Methoden 256

Anhang

Anhang 1. Hilfsabbildungen 257
 a) Einfacher Zusammenhang. 257
 b) Zweifacher Zusammenhang 259

Anhang 2. Literatur über Anwendungsgebiete der konformen Abbildung . . . 259

Anhang 3. Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete 260
 a) Abbildung von Gebiet auf Einheitskreis 261
 b) Abbildung von Einheitskreis auf Gebiet 261
 c) Weitere Literatur 262

Anhang 4. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung 262

Anhang 5. Einige bekannte konforme Abbildungen 264

Literatur 265

Nachträge. 291

Sachverzeichnis 292