

# Inhaltsverzeichnis

## Kapitel I. Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete durch Lösung von Integralgleichungen mit Neumannschem Kern

§ 1. Vorbemerkungen . . . . .	1
1.1. Geometrische Vorbemerkungen und Bezeichnungen . . . . .	2
a) Rektifizierbare und glatte Kurven . . . . .	2
b) Bezeichnungen . . . . .	2
c) Der Neumannsche Kern $K(s, t)$ . . . . .	3
1.2. Randwerte von Cauchy-Integralen . . . . .	4
§ 2. Aufstellung der Integralgleichungen . . . . .	6
2.1. Die Integralgleichung von LICHTENSTEIN . . . . .	6
2.2. Die Integralgleichung von GERSCHGORIN . . . . .	8
2.3. Die Integralgleichung von CARRIER . . . . .	9
2.4. Umformung von $\Phi(s)$ in der Integralgleichung von LICHTENSTEIN . . . . .	11
2.5. Integralgleichungen für Außengebiete . . . . .	12
a) Der Punkt $\infty$ ist Fixpunkt . . . . .	12
b) Der Punkt $\infty$ ist Bild eines endlichen Punktes . . . . .	13
2.6. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet . . . . .	14
2.7. Integralgleichungen für $\theta'(s)$ . . . . .	15
a) Die Integralgleichung von BANIN . . . . .	15
b) Die Integralgleichung von WARSCHAWSKI und STIEFEL . . . . .	16
2.8. Gebiete mit Ecken; Integralgleichung von ARBENZ . . . . .	16
2.9. Gebiete mit Ecken; Analogon zur Integralgleichung von LICHTENSTEIN . . . . .	19
§ 3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von § 2 . . . . .	21
3.1. Konvergenzaussagen mit Hilfe der Fredholmschen Theorie . . . . .	22
a) Allgemeine Konvergenzaussagen . . . . .	22
b) Gewinnung von Fehlerabschätzungen . . . . .	23
3.2. Konvexe Gebiete . . . . .	24
3.3. Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI . . . . .	27
a) Eigenwerte und Eigenfunktionen von (3.9) . . . . .	27
b) Einführung eines Hilbertraumes $H$ und eines Operators $T$ . . . . .	29
c) Zwei Hilfssätze . . . . .	30
d) Der Konvergenzbeweis . . . . .	32
3.4. Untersuchung der Ableitungen und der allgemeinen Integralgleichungen (3.1) . . . . .	33
a) Konvergenz der Folge $\{\theta'_n(s)\}$ . . . . .	33
b) Die Integralgleichungen (3.1) . . . . .	33
c) Folgerungen für die Integralgleichungen von § 2 . . . . .	34
3.5. Abschätzungen für $ \lambda_2 $ . . . . .	36
a) Abschätzungen für $ \lambda_2 $ durch geometrische Annahmen . . . . .	36
b) Vergleichssätze . . . . .	37
3.6. Über die Stieltjes-Integralgleichungen aus 2.8 und 2.9 . . . . .	38

§ 4. Numerische Lösung verschiedener Integralgleichungen von § 2 . . . . .	39
4.1. Diskretisierung der Integralgleichung . . . . .	40
a) Auffassung als Stieltjes-Integral . . . . .	40
b) Auffassung als Riemann-Integral. . . . .	41
c) Diskretisierung der adjungierten Integralgleichung . . . . .	44
4.2. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung . . . . .	45
a) Weitere Eigenschaften von $K(s, z)$ . . . . .	45
b) Abschätzungen von $f'(s)$ und $f''(s)$ . . . . .	46
c) Abschätzung des Quadraturfehlers . . . . .	48
d) Abschätzung von $ f(s_i) - f_i $ . . . . .	49
4.3. Lösung des diskreten Problems; Konvergenzbeschleunigung . . . . .	52
a) Direkte Methoden . . . . .	52
b) Iterationsmethoden . . . . .	52
4.4. Bericht über numerische Experimente . . . . .	55
§ 5. Verschiedenes . . . . .	59
5.1. Methode der Störungsrechnung . . . . .	59
5.2. Weitere Methode zur Behandlung von Gebieten mit Ecken . . . . .	60
 <b>Kapitel II. Das Verfahren von THEODORSEN zur konformen Abbildung von <math> z  &lt; 1</math> auf ein Gebiet</b>	
§ 1. Die Theorie des Verfahrens von THEODORSEN . . . . .	61
1.1. Konjugierte Funktionen . . . . .	62
a) Im Einheitskreis konjugierte Funktionen . . . . .	62
b) Eigenschaften konjugierter Funktionen . . . . .	63
1.2. Die Integralgleichung von THEODORSEN . . . . .	64
a) Ableitung der Integralgleichung . . . . .	64
b) Bestimmung von $f(z)$ für $ z  < 1$ . . . . .	65
c) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Theodorsenschen In- tegralgleichung . . . . .	66
1.3. Iterative Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN. . . . .	67
a) Die Ungleichung von WARSCHAWSKI . . . . .	68
b) Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI . . . . .	69
1.4. Zusätzliche Ergebnisse zum Theodorsen-Verfahren . . . . .	71
a) Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit . . . . .	71
b) Konvergenz der Ableitungen . . . . .	72
c) Abschätzung von $ f_n(z) - f(z) $ . . . . .	72
d) Sternigkeit der Kurven $C_n$ . . . . .	73
e) Die Bedingung $\varepsilon < 1$ . . . . .	73
§ 2. Über die Berechnung konjugierter Funktionen . . . . .	74
2.1. Die Methode von WITTICH . . . . .	74
a) Ableitung der Formel. . . . .	75
b) Eigenschaften der Matrix $\mathfrak{W}$ . . . . .	78

2.2. Andere Methoden mit äquidistanten Knoten . . . . .	80
a) Die Methode von THEODORSEN . . . . .	80
b) Die Methode von NAIMAN . . . . .	82
c) Die Methode von TIMMAN . . . . .	82
d) Die Methode von MULTHOFF . . . . .	83
e) Vergleich der Methoden . . . . .	83
2.3. Verwendung nicht äquidistanter Knoten . . . . .	84
a) Die Formeln von FLÜGGE-LOTZ . . . . .	84
b) Die Formeln von MUGGIA . . . . .	84
§ 3. Numerische Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN . . . . .	85
3.1. Diskretisierung der Integralgleichung . . . . .	85
a) Ableitung der Vektorgleichung . . . . .	85
b) Die Operatorgleichung (3.2) . . . . .	86
c) Geometrische Deutung von $\tilde{\theta}(\varphi)$ . . . . .	87
3.2. Lösung des diskreten Problems nach dem Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren . . . . .	87
a) Gesamtschrittverfahren . . . . .	87
b) Einzelschrittverfahren . . . . .	89
c) Mittelung beim Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren . . . . .	89
3.3. Lösung des diskreten Problems nach dem Newton-Verfahren . . . . .	90
a) Durchführung eines Newton-Schrittes . . . . .	90
b) Konvergenz des Newton-Verfahrens . . . . .	91
3.4. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung . . . . .	92
a) Vorbemerkungen . . . . .	93
b) Abschätzung des Fehlervektors $\mathfrak{z}$ . . . . .	95
c) Abschätzung von $\theta(\varphi) - \tilde{\theta}(\varphi)$ . . . . .	97
d) Abschätzung von $\log \varrho(\theta(\varphi)) - T(\varphi)$ . . . . .	98
3.5. Bericht über numerische Experimente . . . . .	99
a) Durchführung der Rechnung . . . . .	99
b) Eine Versuchsreihe . . . . .	100
c) Weitere Experimente . . . . .	104
§ 4. Verschiedene mit dem Theodorsen-Verfahren verwandte Abbildungsmethoden . . . . .	105
4.1. Das Verfahren von MATTHIEU, NEHARI und v. KÁRMÁN-TREFFTZ . . . . .	105
a) Ableitung der Funktionalgleichung . . . . .	106
b) Die erste Näherung . . . . .	106
4.2. Das Verfahren von KULISCH und MELENTJEW . . . . .	107
a) Iterative Lösung von (4.1) . . . . .	107
b) Das Verfahren von BERGSTRÖM . . . . .	109
4.3. Spezielle Verfahren zur Profilabbildung . . . . .	110
a) Das Verfahren von TIMMAN . . . . .	110
b) Das Verfahren von RIEGELS und WITTICH . . . . .	111
4.4. Das Verfahren von FRIBERG . . . . .	113
4.5. Störungsmethode von YOSHIKAWA . . . . .	114
4.6. Weitere Zitate . . . . .	115

### Kapitel III. Approximation konformer Abbildungen durch Polynome mit Extremaleigenschaften

§ 1. Zwei Minimalprobleme und ihre Lösung durch Ritz-Ansatz . . . . .	116
1.1. Vorbereitungen . . . . .	116
a) Die Räume $L_2(G)$ und $L_2(C)$ . . . . .	116
b) Die Greensche Formel . . . . .	118
1.2. Erstes Minimalproblem . . . . .	118
1.3. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem I . . . . .	120
a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ . . . . .	121
b) Gewinnung des Minimalpolynoms . . . . .	122
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ . . . . .	122
1.4. Zweites Minimalproblem . . . . .	125
1.5. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem II . . . . .	127
a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ . . . . .	127
b) Gewinnung des Minimalpolynoms . . . . .	128
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ . . . . .	128
§ 2. Die Verwendung orthogonaler Polynome zur konformen Abbildung . . . . .	131
2.1. Gewinnung der orthogonalen Polynome . . . . .	132
a) Orthogonalisierungsverfahren von E. SCHMIDT . . . . .	132
b) Gewinnung der $p_n(z)$ mit Hilfe von Determinanten . . . . .	132
2.2. Darstellung der Minimalpolynome $P_n(z)$ und der Kernfunktionen . . . . .	133
2.3. Das asymptotische Verhalten der $p_n(z)$ . . . . .	136
a) Verhalten innerhalb $C$ . . . . .	136
b) Verhalten auf und außerhalb $C$ . . . . .	136
2.4. Einige weitere Eigenschaften der Kernfunktionen . . . . .	139
§ 3. Numerische Gewinnung der Näherungspolynome . . . . .	140
3.1. Direkte Gewinnung der Minimalpolynome . . . . .	140
3.2. Durchführung des Orthonormierungsprozesses . . . . .	142
a) Orthonormierungsprozeß für Vektoren . . . . .	142
b) Verbesserung eines fast orthogonalen Vektors . . . . .	144
c) Orthonormierungsprozeß für Funktionen . . . . .	145
d) Gewinnung der Minimalpolynome $P_n(z)$ . . . . .	146
e) Orthonormale harmonische Polynome . . . . .	147
3.3. Bericht über numerische Experimente . . . . .	147
a) Orthonormale Polynome für das Einheitsquadrat . . . . .	147
b) Die Versuche von DAVIS-RABINOWITZ und HOCHSTRASSER . . . . .	149
c) Die Versuche von BERGMAN-HERRIOT . . . . .	150
d) Weitere Versuche . . . . .	152
e) Folgerungen . . . . .	153
f) Zusatz: Bericht über eine neue Versuchsserie . . . . .	153

## Kapitel IV. Weitere Methoden zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete

§ 1. Konforme Abbildung eines Gebiets mit Hilfe harmonischer Interpolationspolynome . . . . .	154
1.1. Lösung des Dirichletschen Problems mit harmonischen Interpolationspolynomen . . . . .	155
1.2. Anwendung auf die konforme Abbildung. . . . .	157
1.3. Bericht über numerische Experimente . . . . .	158
1.4. Modifikation des Verfahrens . . . . .	162
§ 2. Die Methoden von KANTOROWITSCH . . . . .	163
2.1. Methode der unendlichen, nichtlinearen Gleichungssysteme . . . . .	163
2.2. Störungsmethode von KANTOROWITSCH . . . . .	166
2.3. Konforme Abbildung von Gebiet auf Kreis . . . . .	168
a) Methode der nichtlinearen Gleichungssysteme . . . . .	168
b) Störungsmethode . . . . .	168
§ 3. Polygonabbildungen . . . . .	169
3.1. Die Schwarz-Christoffelschen Formeln; das Parameterproblem . . . . .	169
3.2. Weitere Methoden der Parameterbestimmung . . . . .	171
a) Methode von AHLFORS . . . . .	171
b) Methode von KUFAREV . . . . .	172
c) Methode von BERGMAN . . . . .	172
3.3. Spezielle Polygonabbildungen . . . . .	173
§ 4. Sonstige Abbildungsverfahren . . . . .	173
4.1. Schmiegunungsverfahren . . . . .	173
a) Abbildung auf den Einheitskreis . . . . .	173
b) Abbildung auf die obere Halbebene. . . . .	175
4.2. Die Methode der Extremalpunkte von LEJA . . . . .	177
4.3. Analogmethoden . . . . .	179
a) Gegebene Funktion . . . . .	179
b) Gegebenes Gebiet . . . . .	179

## Kapitel V. Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete

§ 1. Abbildung auf Normalgebiete . . . . .	181
1.1. Zusammenstellung der wichtigsten Normalgebiete. . . . .	182
1.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring . . . . .	183
§ 2. Die Methode der Integralgleichungen mit Neumannschem Kern . . . . .	185
2.1. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet . . . . .	186
a) Unendliches Gebiet . . . . .	186
b) Endliches Gebiet. . . . .	188

2.2. Konforme Abbildung auf ein Radialschlitzgebiet . . . . .	190
2.3. Konforme Abbildung auf einen Kreisring . . . . .	190
a) Ableitung der Integralgleichung . . . . .	191
b) Bericht über ein numerisches Experiment . . . . .	191
2.4. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach ROYDEN . . . . .	192
§ 3. Erweiterung der Methode von THEODORSEN-GARRICK für Ringgebiete . .	194
3.1. Vorbetrachtungen . . . . .	194
a) Einige Hilfsfunktionen . . . . .	194
b) Drei Operatoren in $L_2(-\pi, +\pi)$ . . . . .	195
c) Das Dirichletsche Problem für den Kreisring. . . . .	196
3.2. Das Integralgleichungspaar von GARRICK . . . . .	197
a) Konjugierte Funktionen im Ring. . . . .	197
b) Ableitung der Integralgleichungen von GARRICK . . . . .	198
c) Ermittlung von $f(z)$ für $z \in R$ . . . . .	199
d) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen (3.13) und (3.14) . . . . .	200
3.3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von GARRICK . . . . .	202
a) Aufstellung der Iterationen; Konvergenzsatz . . . . .	202
b) Beweis des Konvergenzsatzes . . . . .	203
3.4. Bericht über numerische Experimente. . . . .	206
§ 4. Funktionentheoretische Iterationsverfahren . . . . .	208
4.1. Vorbereitende Sätze und Definitionen . . . . .	208
a) Verzerrungssatz für Kreisringabbildungen . . . . .	208
b) Zwei Abschätzungen für Ringgebiete . . . . .	211
c) Spiegelung von Gebieten . . . . .	212
4.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach KOMATU . . . . .	214
a) Angabe des Verfahrens . . . . .	214
b) Konvergenz und Fehlerabschätzung . . . . .	215
c) Die Form der Kurven $C_m$ . . . . .	217
4.3. Variationen des Verfahrens von KOMATU. . . . .	218
a) Variation des Verfahrens nach HÜBNER . . . . .	218
b) Variation des Verfahrens nach LANDAU . . . . .	220
c) Faktorisierung der Kreisringabbildung . . . . .	220
d) Schmiegunungsverfahren . . . . .	221
4.4. Numerische Durchführung des Verfahrens von KOMATU an einem Bei- spiel . . . . .	222
a) Ausgangsgebiet $G_0$ und exakte Kreisringabbildung . . . . .	222
b) Anwendung des Komatu-Verfahrens auf das Gebiet $G_0$ . . . . .	224
4.5. Konforme Abbildung auf ein Vollkreisgebiet . . . . .	229
a) Schilderung der beiden Koebeschen Verfahren . . . . .	229
b) Konvergenz der Verfahren . . . . .	230

c) Faktorisierung der Vollkreisabbildung . . . . . 232  
 d) Bericht über ein Experiment . . . . . 233

4.6. Konforme Abbildung auf Schlitz- und Lemniskatengebiete . . . . . 235  
 a) Iterationsverfahren zur Gewinnung der  $\vartheta$ -Schlitzabbildung . . . 235  
 b) Konvergenz des Verfahrens . . . . . 236  
 c) Konforme Abbildung auf Lemniskatengebiete . . . . . 238  
 d) Zusatz: Faktorisierung und iterative Gewinnung beliebiger  
 schlichter Funktionen . . . . . 240

§ 5. Verschiedene weitere Methoden zur konformen Abbildung mehrfach zu-  
 sammenhängender Gebiete. . . . . 241

5.1. Konforme Abbildung auf Normalgebiete mit Hilfe von Orthonormal-  
 systemen oder der Bergmanschen Kernfunktion . . . . . 241

5.2. Konforme Abbildung auf Normalgebiete durch Lösung von Extremal-  
 problemen mit direkten Methoden . . . . . 245  
 a) Allgemeines Minimumproblem, seine Lösung durch Ritz-Ansatz . 245  
 b) Approximation der Kernfunktion über ein Minimalproblem . . . 248  
 c) Approximation von  $\varphi_{\vartheta}(z)$  über ein Minimalproblem. . . . . 248

5.3. Konforme Abbildung eines Ringgebiets auf einen Kreisring durch  
 Lösung von Extremalproblemen . . . . . 249  
 a) Verwendung der Methode von 5.2,a) . . . . . 249  
 b) Extremalprobleme von KHAJALIA . . . . . 251

5.4. Übertragung der Methoden von KANTOROWITSCH . . . . . 253

5.5. Sonstige Methoden . . . . . 256

**Anhang**

Anhang 1. Hilfsabbildungen . . . . . 257  
 a) Einfacher Zusammenhang. . . . . 257  
 b) Zweifacher Zusammenhang . . . . . 259

Anhang 2. Literatur über Anwendungsgebiete der konformen Abbildung . . . 259

Anhang 3. Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete . . . . . 260  
 a) Abbildung von Gebiet auf Einheitskreis . . . . . 261  
 b) Abbildung von Einheitskreis auf Gebiet . . . . . 261  
 c) Weitere Literatur . . . . . 262

Anhang 4. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung . . . . . 262

Anhang 5. Einige bekannte konforme Abbildungen . . . . . 264

Literatur . . . . . 265

Nachträge. . . . . 291

Sachverzeichnis . . . . . 292