

Inhaltsverzeichnis

I. TEIL

Grundlegende analytische und funktionentheoretische Eigenschaften der Laplace -Transformation

1. Kapitel: Allgemeines über lineare Funktionaltransformationen und Grundbegriffe der Funktionalanalysis	19
§ 1. Lineare Funktionaltransformationen	19
§ 2. Allgemeine Funktionaltransformationen	22
§ 3. Der Grenzbegriff im unendlichvi-dimensionalen Raum	23
2. Kapitel: Allgemeine analytische Eigenschaften der Laplace- Transformation	29
§ 1. Der zugrunde gelegte Integralbegriff	29
§ 2. Definition und Konvergenzeigenschaften des Laplace-Integrals	32
§ 3. Laplace-Transformation und Laplace-Transformierte	43
§ 4. Beispiele	45
§ 5. Die numerische Berechnung einer Laplace-Transformierten	52
§ 6. Die Dirichletsche Reihe als Laplace-Integral	53
§ 7. Die zweiseitige Laplace-Transformation und die Mellin-Transforma- tion. Die Fourier- und die \mathfrak{N} -Transformation	59
§ 8. Die Laplace-Transformation in Gestalt eines Stieltjes-Integrals	61
§ 9. Die im wesentlichen eindeutige Bestimmung der L -Funktion durch die l -Funktion	72
§ 10. Anwendungen des Eindeutigkeitssatzes	80
§ 11. Die Abbildung einer linearen Substitution der Variablen in der L - oder l -Funktion	85
§ 12. Die Abbildung der Integration der L -Funktion	87
§ 13. Die Abbildung der Differentiation der L -Funktion	98
§ 14. Die Faltung und ihre allgemeinen Eigenschaften	104
§ 15. Die Abbildung der Faltung zweier Originalfunktionen	121
§ 16. Die Abbildung weiterer Operationen an der L -Funktion	131
3. Kapitel: Allgemeine funktionentheoretische Eigenschaften der durch die Laplace-Transformation erzeugten Funk- tionen	141
§ 1. Gleichmäßige Konvergenz des Laplace-Integrals	141
§ 2. Holomorphie der l -Funktion	144

N
0

§ 3. Die Holomorphiehalbebene von $f(s)$	151
§ 4. Existenz einer Singularität auf der Konvergenzgeraden in speziellen Fällen	153
§ 5. Verhalten von $f(s)$ bei Annäherung an einen Konvergenzpunkt	156
§ 6. Verhalten von $f(s)$ bei Annäherung an $s = \infty$	162
§ 7. Die Ordnung von $f(s)$ auf Vertikalen	177
§ 8. Die Beschränktheithalbebene von $f(s)$	180

II. TEIL

Die Umkehrung der Fourier- und Laplace-Transformation, die Parsevalsche Gleichung und verwandte Probleme

4. Kapitel: Die komplexe Umkehrformel	191
§ 1. Fouriersches Integraltheorem und Fourier-Transformation	191
§ 2. Erster Satz über die Umkehrung der (absolut konvergenten) Fourier-Transformation	198
§ 3. Zweiter Satz über die Umkehrung der (absolut konvergenten) Fourier-Transformation	207
§ 4. Die komplexe Umkehrformel für die absolut konvergente Laplace-Transformation	209
§ 5. Die komplexe Umkehrformel für die einfach konvergente Laplace-Transformation	218
§ 6. Die Differentiation der komplexen Umkehrformel	221
§ 7. Deformation des Integrationsweges im komplexen Umkehrintegral	223
5. Kapitel: Formeln für das Partialintegral der Laplace-Transformation	231
§ 1. Darstellung des Partialintegrals der Laplace-Transformation durch ein komplexes Integral	231
§ 2. Über das Konvergenzproblem der Laplace-Transformation	237
§ 3. Anwendung: Formeln für die Partialsummen von Dirichletschen Reihen mit einem Beitrag zum Konvergenzproblem dieser Reihen	239
6. Kapitel: Die Parsevalsche Gleichung	245
§ 1. Die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Transformation	245
§ 2. Die Parsevalsche Formel für die Laplace-Transformation und der quadratische Mittelwert von $f(s)$ auf Vertikalen	251
§ 3. Die Umkehrformel zum Faltungssatz	255
§ 4. Die Laplace-Transformation eines Produkts	257
7. Kapitel: Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Transformierte	259
§ 1. Das Darstellungsproblem	259
§ 2. Bedingungen für die Darstellbarkeit	260

§ 3. Die Berechnung des komplexen Integrals für meromorphe l -Funktionen durch Residuenrechnung	267
8. Kapitel: Weitere Umkehrformeln für die Laplace-Transformation	285
§ 1. Berechnung der L -Funktion aus den Werten der l -Funktion für große reelle s	285
§ 2. Berechnung der L -Funktion aus den Werten der Ableitungen hoher Ordnung von $f(s)$ für große reelle s	290
§ 3. Umkehrung durch Reihenentwicklung	296

III. TEIL

Eine Verallgemeinerung der Laplace-Transformation

9. Kapitel: Die Cesàroschen arithmetischen Mittel des Laplace-Integrals und die $\mathfrak{Q}^{(k)}$-Transformation	311
§ 1. Die (C, k) -Mittel für Funktionen	311
§ 2. Die (C, k) -Mittel des Laplace-Integrals. Die $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformation und ihre Konvergenzhalbene	314
§ 3. Funktionentheoretische Eigenschaften der $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformierten	330
§ 4. Darstellung des (C, k) -Mittels von $\mathfrak{Q}\{F\}$ durch ein komplexes Integral	333
§ 5. Anwendung auf das Konvergenzproblem von $\mathfrak{Q}^{(k)}\{F\}$	343
§ 6. Der Faltungssatz für die $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformation	350

IV. TEIL

Die Laplace-Transformation spezieller Klassen von Funktionen

10. Kapitel: Die Laplace-Transformation der ganzen Funktionen vom Exponentialtypus	355
§ 1. Die den L -Funktionen vom Exponentialtypus entsprechende Klasse von l -Funktionen	355
§ 2. Analytische Fortsetzung der l -Funktion durch Drehung des Integrationsweges in der t -Ebene	362
§ 3. Bestimmung des Konvergenzgebietes von $\mathfrak{Q}^{(\varphi)}\{F\}$ durch die Singularitäten von $f(s)$	371
§ 4. Der Zusammenhang zwischen dem Anwachsen von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und den Singularitäten von $f(s)$	378
§ 5. Das Borelsche Summabilitätspolygon, das Antipolygon und die verallgemeinerten Borel-Polygone	380
§ 6. Die Abbildung des Produkts und die Faltungssätze in den Klassen \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{a}_1	397

11. Kapitel: Die zweiseitige Laplace-Transformation bzw. Mellin-Transformation von analytischen Funktionen	403
§ 1. Die \mathfrak{L}_{Π} -Transformation von Funktionen, die in einem Streifen analytisch sind und Exponentialabschätzungen genügen	403
§ 2. Die Mellin-Transformation von Funktionen, die in einem Winkelraum analytisch sind und Potenzabschätzungen genügen	408
§ 3. Die Abbildung des Produkts und die Faltungssätze in den Klassen \mathfrak{A}_{Π} und \mathfrak{a}_{Π} bzw. \mathfrak{B} und \mathfrak{b}	414
§ 4. Anwendung der Mellin-Transformation in der Funktionentheorie	415
12. Kapitel: Die Laplace-Transformation von Funktionen der Klasse L^2	419
§ 1. Hilfssätze über die Plancherelsche Fourier-Transformation und die Funktionsklasse \mathfrak{S}^2	420
§ 2. Funktionen aus \mathfrak{S}^2 als Laplace-Transformierte von Funktionen aus $L^2(0, \infty)$	422
§ 3. Metrisierung der Räume $L^2(0, \infty)$ und \mathfrak{S}^2 . Korrespondenz zwischen mittelkonvergenten Reihen für $F(t)$ und absolut konvergenten Reihen für $f(s)$ als Konsequenz der Parsevalschen Gleichung	432
§ 4. Korrespondenz zwischen Orthogonalfunktionen im Intervall $0 < t < \infty$ und solchen im Intervall $-\infty < y < +\infty$ als Konsequenz der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung	434
§ 5. Verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung, Umkehrformel zum Faltungssatz, Laplace-Transformierte eines Produkts und Cauchysche Formel für Funktionen aus $L^2(0, \infty)$	437
§ 6. Eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation, die die Werte von $f(s)$ auf der reellen Achse benutzt	438
§ 7. Ein Vergleich zwischen Potenzreihen, fastperiodischen Funktionen (Dirichletschen Reihen) und der Laplace-Transformierten hinsichtlich Umkehrformel und Parsevalscher Gleichung	442

V. TEIL.

Abelsche und Taubersche Sätze

13. Kapitel: Abelsche Sätze über das Verhalten der Laplace-Transformierten an einer singulären Stelle im Endlichen	455
§ 1. Asymptotisches Verhalten bei Annäherung in einem Winkelraum an eine singuläre Stelle auf der Konvergenzgeraden	455
§ 2. Anwendungen: Singuläre Integrale. Vergleich zwischen verschiedenen Summationsmethoden	461
§ 3. Vollständige Charakterisierung einer auf der Konvergenzgeraden liegenden Singularität der Laplace-Transformierten	466
§ 4. Abelsche Sätze für die zweiseitige Laplace-Transformation und die Mellin-Transformation	471

14. Kapitel: **Abelsche Sätze über das Verhalten der Laplace-Transformierten für $s \rightarrow \infty$** 473

 § 1. Verhalten für $s \rightarrow \infty$ in einem Winkelraum auf Grund von Voraussetzungen über das asymptotische Verhalten von $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ 473

 § 2. Verhalten für $s \rightarrow \infty$ in einer Halbebene auf Grund von Voraussetzungen über die Ableitungen von $F(t)$ 477

 § 3. Verhalten für $s \rightarrow \infty$, wenn $F(t)$ in einem Intervall rechts von 0 verschwindet 481

15. Kapitel: **Abelsche Sätze für das komplexe Umkehrintegral** 485

 § 1. Verhalten des komplexen Umkehrintegrals für $t \rightarrow \pm \infty$ auf Grund gleichmäßiger Konvergenz 485

 § 2. Verhalten für $t \rightarrow + \infty$, wenn $f(s)$ links, und für $t \rightarrow - \infty$, wenn $f(s)$ rechts vom Integrationsweg eine isolierte singuläre Stelle besitzt 488

 § 3. Verhalten für $t \rightarrow + \infty$ auf Grund des asymptotischen Verhaltens von $f(s)$ an einer Stelle links vom Integrationsweg 494

 § 4. Verhalten des Umkehrintegrals mit winkelförmigem Integrationsweg für $t \rightarrow \infty$ auf Grund des asymptotischen Verhaltens von $f(s)$ im Scheitelpunkt 496

 § 5. Verhalten des Umkehrintegrals für $t \rightarrow 0$ auf Grund des asymptotischen Verhaltens von $f(s)$ für $s \rightarrow \infty$ in einer Halbebene 502

16. Kapitel: **Taubersche Sätze für die Laplace-Transformation** 505

 § 1. Taubersche Sätze reeller Art 505

 § 2. Taubersche Sätze funktionentheoretischer Art 524

Anhang

Formeln 531

Ungleichungen 532

Reelle Analysis 532

Das uneigentliche Riemannsches Integral 535

Das Lebesguesche Integral 538

Grenzübergang unter dem Lebesgueschen Integral 539

Grenzübergang unter dem Riemannschen Integral 540

Darstellung von Doppelintegralen durch iterierte einfache Integrale. Vertauschung von Integralen 541

Integration einer Reihe über ein unendliches Intervall 542

Allgemeine Sätze über das Integral 542

Abgeschlossenheit und Vollständigkeit von Folgen 544

Funktionentheorie 545

Literarische und historische Nachweise 549

Bücher über die Laplace-Transformation 561

Literaturverzeichnis 563

Sachregister 577