

# Inhaltsverzeichnis

## I. TEIL

### Grundlegende analytische und funktionentheoretische Eigenschaften der Laplace -Transformation

1. Kapitel: <b>Allgemeines über lineare Funktionaltransformationen und Grundbegriffe der Funktionalanalysis</b> . . . . .	19
§ 1. Lineare Funktionaltransformationen . . . . .	19
§ 2. Allgemeine Funktionaltransformationen . . . . .	22
§ 3. Der Grenzbegriff im unendlichvi-dimensionalen Raum . . . . .	23
2. Kapitel: <b>Allgemeine analytische Eigenschaften der Laplace- Transformation</b> . . . . .	29
§ 1. Der zugrunde gelegte Integralbegriff . . . . .	29
§ 2. Definition und Konvergenzeigenschaften des Laplace-Integrals . . . . .	32
§ 3. Laplace-Transformation und Laplace-Transformierte . . . . .	43
§ 4. Beispiele . . . . .	45
§ 5. Die numerische Berechnung einer Laplace-Transformierten . . . . .	52
§ 6. Die Dirichletsche Reihe als Laplace-Integral . . . . .	53
§ 7. Die zweiseitige Laplace-Transformation und die Mellin-Transforma- tion. Die Fourier- und die $\mathfrak{N}$ -Transformation . . . . .	59
§ 8. Die Laplace-Transformation in Gestalt eines Stieltjes-Integrals . . . . .	61
§ 9. Die im wesentlichen eindeutige Bestimmung der $L$ -Funktion durch die $l$ -Funktion . . . . .	72
§ 10. Anwendungen des Eindeutigkeitssatzes . . . . .	80
§ 11. Die Abbildung einer linearen Substitution der Variablen in der $L$ - oder $l$ -Funktion . . . . .	85
§ 12. Die Abbildung der Integration der $L$ -Funktion . . . . .	87
§ 13. Die Abbildung der Differentiation der $L$ -Funktion . . . . .	98
§ 14. Die Faltung und ihre allgemeinen Eigenschaften . . . . .	104
§ 15. Die Abbildung der Faltung zweier Originalfunktionen . . . . .	121
§ 16. Die Abbildung weiterer Operationen an der $L$ -Funktion . . . . .	131
3. Kapitel: <b>Allgemeine funktionentheoretische Eigenschaften der durch die Laplace-Transformation erzeugten Funk- tionen</b> . . . . .	141
§ 1. Gleichmäßige Konvergenz des Laplace-Integrals . . . . .	141
§ 2. Holomorphie der $l$ -Funktion . . . . .	144

N  
0

§ 3. Die Holomorphiehalbebene von $f(s)$ . . . . .	151
§ 4. Existenz einer Singularität auf der Konvergenzgeraden in speziellen Fällen . . . . .	153
§ 5. Verhalten von $f(s)$ bei Annäherung an einen Konvergenzpunkt . . . . .	156
§ 6. Verhalten von $f(s)$ bei Annäherung an $s = \infty$ . . . . .	162
§ 7. Die Ordnung von $f(s)$ auf Vertikalen . . . . .	177
§ 8. Die Beschränktheithalbebene von $f(s)$ . . . . .	180

II. TEIL

**Die Umkehrung der Fourier- und Laplace-Transformation, die Parsevalsche Gleichung und verwandte Probleme**

4. Kapitel: <b>Die komplexe Umkehrformel</b> . . . . .	191
§ 1. Fouriersches Integraltheorem und Fourier-Transformation . . . . .	191
§ 2. Erster Satz über die Umkehrung der (absolut konvergenten) Fourier-Transformation . . . . .	198
§ 3. Zweiter Satz über die Umkehrung der (absolut konvergenten) Fourier-Transformation . . . . .	207
§ 4. Die komplexe Umkehrformel für die absolut konvergente Laplace-Transformation . . . . .	209
§ 5. Die komplexe Umkehrformel für die einfach konvergente Laplace-Transformation . . . . .	218
§ 6. Die Differentiation der komplexen Umkehrformel . . . . .	221
§ 7. Deformation des Integrationsweges im komplexen Umkehrintegral . . . . .	223
5. Kapitel: <b>Formeln für das Partialintegral der Laplace-Transformation</b> . . . . .	231
§ 1. Darstellung des Partialintegrals der Laplace-Transformation durch ein komplexes Integral . . . . .	231
§ 2. Über das Konvergenzproblem der Laplace-Transformation . . . . .	237
§ 3. Anwendung: Formeln für die Partialsummen von Dirichletschen Reihen mit einem Beitrag zum Konvergenzproblem dieser Reihen . . . . .	239
6. Kapitel: <b>Die Parsevalsche Gleichung</b> . . . . .	245
§ 1. Die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Transformation . . . . .	245
§ 2. Die Parsevalsche Formel für die Laplace-Transformation und der quadratische Mittelwert von $f(s)$ auf Vertikalen . . . . .	251
§ 3. Die Umkehrformel zum Faltungssatz . . . . .	255
§ 4. Die Laplace-Transformation eines Produkts . . . . .	257
7. Kapitel: <b>Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Transformierte</b> . . . . .	259
§ 1. Das Darstellungsproblem . . . . .	259
§ 2. Bedingungen für die Darstellbarkeit . . . . .	260

§ 3. Die Berechnung des komplexen Integrals für meromorphe $l$ -Funktionen durch Residuenrechnung . . . . .	267
<b>8. Kapitel: Weitere Umkehrformeln für die Laplace-Transformation . . . . .</b>	<b>285</b>
§ 1. Berechnung der $L$ -Funktion aus den Werten der $l$ -Funktion für große reelle $s$ . . . . .	285
§ 2. Berechnung der $L$ -Funktion aus den Werten der Ableitungen hoher Ordnung von $f(s)$ für große reelle $s$ . . . . .	290
§ 3. Umkehrung durch Reihenentwicklung . . . . .	296

III. TEIL

**Eine Verallgemeinerung der Laplace-Transformation**

<b>9. Kapitel: Die Cesàroschen arithmetischen Mittel des Laplace-Integrals und die <math>\mathfrak{Q}^{(k)}</math>-Transformation . . . . .</b>	<b>311</b>
§ 1. Die $(C, k)$ -Mittel für Funktionen . . . . .	311
§ 2. Die $(C, k)$ -Mittel des Laplace-Integrals. Die $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformation und ihre Konvergenzhalbene . . . . .	314
§ 3. Funktionentheoretische Eigenschaften der $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformierten . . . . .	330
§ 4. Darstellung des $(C, k)$ -Mittels von $\mathfrak{Q}\{F\}$ durch ein komplexes Integral . . . . .	333
§ 5. Anwendung auf das Konvergenzproblem von $\mathfrak{Q}^{(k)}\{F\}$ . . . . .	343
§ 6. Der Faltungssatz für die $\mathfrak{Q}^{(k)}$ -Transformation . . . . .	350

IV. TEIL

**Die Laplace-Transformation spezieller Klassen von Funktionen**

<b>10. Kapitel: Die Laplace-Transformation der ganzen Funktionen vom Exponentialtypus . . . . .</b>	<b>355</b>
§ 1. Die den $L$ -Funktionen vom Exponentialtypus entsprechende Klasse von $l$ -Funktionen . . . . .	355
§ 2. Analytische Fortsetzung der $l$ -Funktion durch Drehung des Integrationsweges in der $t$ -Ebene . . . . .	362
§ 3. Bestimmung des Konvergenzgebietes von $\mathfrak{Q}^{(\varphi)}\{F\}$ durch die Singularitäten von $f(s)$ . . . . .	371
§ 4. Der Zusammenhang zwischen dem Anwachsen von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und den Singularitäten von $f(s)$ . . . . .	378
§ 5. Das Borelsche Summabilitätspolygon, das Antipolygon und die verallgemeinerten Borel-Polygone . . . . .	380
§ 6. Die Abbildung des Produkts und die Faltungssätze in den Klassen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ . . . . .	397

11. Kapitel: <b>Die zweiseitige Laplace-Transformation bzw. Mellin-Transformation von analytischen Funktionen</b> . . . . .	403
§ 1. Die $\mathfrak{L}_{\Pi}$ -Transformation von Funktionen, die in einem Streifen analytisch sind und Exponentialabschätzungen genügen . . . . .	403
§ 2. Die Mellin-Transformation von Funktionen, die in einem Winkelraum analytisch sind und Potenzabschätzungen genügen . . . . .	408
§ 3. Die Abbildung des Produkts und die Faltungssätze in den Klassen $\mathfrak{A}_{\Pi}$ und $\mathfrak{a}_{\Pi}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$ . . . . .	414
§ 4. Anwendung der Mellin-Transformation in der Funktionentheorie . . . . .	415
12. Kapitel: <b>Die Laplace-Transformation von Funktionen der Klasse <math>L^2</math></b> . . . . .	419
§ 1. Hilfssätze über die Plancherelsche Fourier-Transformation und die Funktionsklasse $\mathfrak{S}^2$ . . . . .	420
§ 2. Funktionen aus $\mathfrak{S}^2$ als Laplace-Transformierte von Funktionen aus $L^2(0, \infty)$ . . . . .	422
§ 3. Metrisierung der Räume $L^2(0, \infty)$ und $\mathfrak{S}^2$ . Korrespondenz zwischen mittelkonvergenten Reihen für $F(t)$ und absolut konvergenten Reihen für $f(s)$ als Konsequenz der Parsevalschen Gleichung . . . . .	432
§ 4. Korrespondenz zwischen Orthogonalfunktionen im Intervall $0 < t < \infty$ und solchen im Intervall $-\infty < y < +\infty$ als Konsequenz der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung . . . . .	434
§ 5. Verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung, Umkehrformel zum Faltungssatz, Laplace-Transformierte eines Produkts und Cauchysche Formel für Funktionen aus $L^2(0, \infty)$ . . . . .	437
§ 6. Eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation, die die Werte von $f(s)$ auf der reellen Achse benutzt . . . . .	438
§ 7. Ein Vergleich zwischen Potenzreihen, fastperiodischen Funktionen (Dirichletschen Reihen) und der Laplace-Transformierten hinsichtlich Umkehrformel und Parsevalscher Gleichung . . . . .	442

## V. TEIL.

### Abelsche und Taubersche Sätze

13. Kapitel: <b>Abelsche Sätze über das Verhalten der Laplace-Transformierten an einer singulären Stelle im Endlichen</b> . . . . .	455
§ 1. Asymptotisches Verhalten bei Annäherung in einem Winkelraum an eine singuläre Stelle auf der Konvergenzgeraden . . . . .	455
§ 2. Anwendungen: Singuläre Integrale. Vergleich zwischen verschiedenen Summationsmethoden . . . . .	461
§ 3. Vollständige Charakterisierung einer auf der Konvergenzgeraden liegenden Singularität der Laplace-Transformierten . . . . .	466
§ 4. Abelsche Sätze für die zweiseitige Laplace-Transformation und die Mellin-Transformation . . . . .	471

14. Kapitel: **Abelsche Sätze über das Verhalten der Laplace-Transformierten für  $s \rightarrow \infty$**  . . . . . 473

    § 1. Verhalten für  $s \rightarrow \infty$  in einem Winkelraum auf Grund von Voraussetzungen über das asymptotische Verhalten von  $F(t)$  für  $t \rightarrow 0$  . . . . . 473

    § 2. Verhalten für  $s \rightarrow \infty$  in einer Halbebene auf Grund von Voraussetzungen über die Ableitungen von  $F(t)$  . . . . . 477

    § 3. Verhalten für  $s \rightarrow \infty$ , wenn  $F(t)$  in einem Intervall rechts von 0 verschwindet . . . . . 481

15. Kapitel: **Abelsche Sätze für das komplexe Umkehrintegral** . . . . . 485

    § 1. Verhalten des komplexen Umkehrintegrals für  $t \rightarrow \pm \infty$  auf Grund gleichmäßiger Konvergenz . . . . . 485

    § 2. Verhalten für  $t \rightarrow + \infty$ , wenn  $f(s)$  links, und für  $t \rightarrow - \infty$ , wenn  $f(s)$  rechts vom Integrationsweg eine isolierte singuläre Stelle besitzt . . . . . 488

    § 3. Verhalten für  $t \rightarrow + \infty$  auf Grund des asymptotischen Verhaltens von  $f(s)$  an einer Stelle links vom Integrationsweg . . . . . 494

    § 4. Verhalten des Umkehrintegrals mit winkelförmigem Integrationsweg für  $t \rightarrow \infty$  auf Grund des asymptotischen Verhaltens von  $f(s)$  im Scheitelpunkt . . . . . 496

    § 5. Verhalten des Umkehrintegrals für  $t \rightarrow 0$  auf Grund des asymptotischen Verhaltens von  $f(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  in einer Halbebene . . . . . 502

16. Kapitel: **Taubersche Sätze für die Laplace-Transformation** . . . . . 505

    § 1. Taubersche Sätze reeller Art . . . . . 505

    § 2. Taubersche Sätze funktionentheoretischer Art . . . . . 524

**Anhang**

Formeln . . . . . 531

Ungleichungen . . . . . 532

Reelle Analysis . . . . . 532

Das uneigentliche Riemannsches Integral . . . . . 535

Das Lebesguesche Integral . . . . . 538

Grenzübergang unter dem Lebesgueschen Integral . . . . . 539

Grenzübergang unter dem Riemannschen Integral . . . . . 540

Darstellung von Doppelintegralen durch iterierte einfache Integrale. Vertauschung von Integralen . . . . . 541

Integration einer Reihe über ein unendliches Intervall . . . . . 542

Allgemeine Sätze über das Integral . . . . . 542

Abgeschlossenheit und Vollständigkeit von Folgen . . . . . 544

Funktionentheorie . . . . . 545

**Literarische und historische Nachweise** . . . . . 549

**Bücher über die Laplace-Transformation** . . . . . 561

**Literaturverzeichnis** . . . . . 563

**Sachregister** . . . . . 577