

# INHALTSVERZEICHNIS

## Die Euklidische Geometrie

<b>I. Von der induktiven zur deduktiven Methode (Vom Handwerk zur Wissenschaft)</b> . . . . .	13
1. Die induktive Methode . . . . .	13
1.1 Die Summe der Winkelmaßzahlen im Dreieck . . . . .	13
1.2 Der Satz des Pythagoras . . . . .	13
2. Grenzen der induktiven Methode . . . . .	14
2.1 Grenzen der Genauigkeit . . . . .	14
2.2 Mangel an Allgemeinheit . . . . .	14
3. Die deduktive Methode . . . . .	15
3.1 Die Summe der Winkelmaßzahlen im Dreieck . . . . .	15
3.2 Ein Satz über die Kongruenz zweier Strecken . . . . .	15
3.3 Ein Satz über die Parallelität zweier Geraden . . . . .	16
3.4 Mangelndes Verständnis für deduktive Beweise . . . . .	17
<b>II. Von der Analyse zur Synthese</b> . . . . .	18
1. Die ABC-Problematik . . . . .	18
2. Analyse-Synthese . . . . .	18
3. Auswahl der Axiome . . . . .	19
3.1 Kein Axiom zu viel . . . . .	19
3.2 Kein Axiom zu wenig . . . . .	19
4. Axiom-Definition . . . . .	19
<b>III. Ein axiomatischer Aufbau</b> . . . . .	20
1. Die Grundelemente . . . . .	20
2. Verknüpfung . . . . .	20
3. Anordnung . . . . .	21
4. Kongruenzabbildungen . . . . .	25
4.1 Die Axiome . . . . .	25
4.2 Sätze über Kongruenz von Strecken, Winkeln und Dreiecken . . . . .	29
5. Wie kommen Zahlen in die Geometrie? . . . . .	32
5.1 Zwei neue Axiome . . . . .	32
5.2 Die Messung von Strecken . . . . .	33
5.3 Die Messung von Winkeln . . . . .	36
5.4 Sätze über Längen- und Winkelmaßzahlen im Dreieck . . . . .	36
6. Parallelität . . . . .	38
<b>IV. Wer die Wahl hat, hat die Qual</b> . . . . .	39
1. Euklid-Hilbert (Das "klassische" Axiomensystem) . . . . .	40
1.1 Euklid . . . . .	40
1.2 Hilbert . . . . .	40
1.3 Das Axiomensystem von Hilbert . . . . .	41
1.3.1 Axiome des Zwischen . . . . .	41
1.3.2 Axiome des Kongruenz . . . . .	41
1.3.3 Maximalitätsaxiom . . . . .	42

2. Bachmann (Axiomatik der Spiegelungsgeometrie).	42
3. Blumenthal (Axiomatik der Distanzgeometrie).	43
4. Birkhoff (Axiomatik der Meßgeräte)	44
5. Axiomatik der Vektorgeometrie	45
6. Zusammenfassung	45

## Eine Nichteuklidische Geometrie

<b>V. Die Sache mit dem Parallelenaxiom</b>	48
1. Ist Axiom V wirklich ein Axiom?	48
1.1 Die "absolute" Geometrie	48
1.2 Beweis des Axioms?	48
2. Der Winkelsummensatz	48
2.1 (Erster) Winkelsummensatz von Legendre	49
2.2 (Zweiter) Winkelsummensatz von Saccheri-Legendre	49
3. Parallelenaxiom und Winkelsummensatz	51
4. Die Idee Saccheris	52
<b>VI. Eine neue Formalgeometrie</b>	53
1. Die Geburt der nichteuklidischen Geometrie	53
2. Einige Sätze aus der hyperbolischen Formalgeometrie	54
<b>VII. Modelle, Variablen</b>	58
1. $A \rightarrow B \rightarrow C$	58
2. Modelle der hyperbolischen Formalgeometrie	58
2.1 Das spezielle Poincaré-Modell	59
2.2 Das allgemeine Poincaré-Modell	60
2.3 Das Klein-Modell	60
2.4 Das Kugelmodell	61
2.5 Geometrischer Zusammenhang der betrachteten Modelle	62
2.6 Das Beltrami-Modell	62
2.7 Gültigkeit der Axiome	63
3. Variablen	64
4. Salto mortale, Modelle der euklidischen Geometrie	64
4.1 Das Kreismodell	65
4.2 Das Kugelmodell	65
4.3 Geometrischer Zusammenhang der beiden Modelle	66
4.4 Modell über $\mathbb{R}$	66
5. Nichteuklidische Geometrie und Wirklichkeit	66

## Künstliche Geometrien

<b>VIII. Der letzte Abstraktionsschritt</b>	68
1. Autonome und heteronome Axiomensysteme	68
2. Grenzen der Willkür	69

<b>IX. Die (affine) Inzidenzgeometrie, eine künstliche Geometrie</b>	70
1. Axiome der Minigeometrie (Problem A)	70
1.1 Die Grundelemente	70
1.2 Inzidenz	70
1.3 Die Axiome	70
1.4 Widerspruchsfreiheit	71
1.5 Verschiedene Morphismen	72
1.5.1 Isomorphismus	72
1.5.2 Monomorphe und polymorphe Axiomensysteme	72
1.6 Unabhängigkeit	73
1.7 Vollständigkeit	73
2. Formalgeometrie (Problem B)	75
2.1 Grundlegende Sätze	75
2.2 Minimal-Sätze	76
2.3 Wenn-Dann-Sätze	78
2.4 Abbildungen	80
3. Algebraische Modelle unserer Minigeometrie (Problem C)	86
3.1 Ordnung $k = 2$	86
3.1.1 Restklassenkörper modulo 2	86
3.1.2 Das Modell	86
3.1.3 Abbildungen im Modell	87
3.2 Ordnung $k = 3$	89
3.2.1 Restklassenkörper modulo 3	89
3.2.2 Das Modell	89
3.2.3 Abbildungen im Modell	91
3.3 Ordnung $k$	94
3.3.1 Das Modell	94
3.3.2 Abbildungen im Modell	95
3.4 Grenzen unserer Modellbildung	99
3.4.1 Restklassenkörper modulo $k \in \mathbb{N}$	99
3.4.2 (Affine) Inzidenzebenen der Ordnung $k \in \mathbb{N}$	99
<b>X. Triumph und Grenze der Axiomatik</b>	101
1. Axiomatik überall	101
2. Grenzen der Axiomatik	102
2.1 Nochmals zur Vollständigkeit	102
2.2 Nochmals zur Widerspruchsfreiheit	103
2.2.1 "Semantische" Widerspruchsfreiheit	103
2.2.2 Weiterschieben des "schwarzen Peters"	103
2.2.3 "Syntaktische" Widerspruchsfreiheit	103
3. Mathematik und Wirklichkeit	104
Grundlegende und weiterführende Literatur	104
Bildtafeln	
Paul Klee: Grenzen des Verstandes	vor dem Innentitel
Ägyptische Malerei mit Harpedonapten (1567 – 1310 v. Chr.)	vor Seite 13
David Hilbert (1862 – 1943)	nach Seite 44
Hieronimus Saccheri: Titelseite	vor Seite 45
Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij (1792 – 1856)	nach Seite 60
Kurt Gödel (*1906)	vor Seite 61