
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aufgaben der Elastostatik	1
1.2	Einige Meilensteine in der Geschichte der Elastostatik	4
1.3	Methodisches Vorgehen zur Erarbeitung der vier Grundlastfälle	5
1.4	Inhalte des Buches und Hinweise zu den Übungsaufgaben	6
2	Zug und Druck in Stäben	9
2.1	Der homogene Zug/Druck-Stab	9
2.1.1	Normal- und Schubspannungen	9
2.1.2	Dehnungen	13
2.1.3	Materialverhalten im Experiment	15
2.1.4	Stoffgesetze	17
2.1.5	Ingenieuraufgaben zur Gebrauchsfähigkeit	19
2.1.6	Der homogene Zug/Druck-Stab: Voraussetzungen und Annahmen	20
2.1.7	Praktische Berechnung von statisch bestimmten, homogenen Zug/Druck-Stäben	21
2.1.8	Praktische Berechnung von statisch unbestimmten, homogenen Zug/Druck-Stäben	25
2.1.9	Aufgaben zu Abschnitt 2.1	31
2.2	Der inhomogene Zug/Druck-Stab	37
2.2.1	Voraussetzungen und Annahmen	37
2.2.2	Die Gleichgewichtsbedingung	37
2.2.3	Inhomogene Spannungen längs der Stabachse	38
2.2.4	Inhomogene Dehnungen längs der Stabachse	38
2.2.5	Stoffgesetze	39
2.2.6	Die Grundgleichungen des inhomogenen Zug/Druck-Stabes	40
2.2.7	Auswertung der Grundgleichungen	41
2.2.8	Praktische Berechnung von statisch bestimmten, inhomogenen Zug/Druck-Stäben	41
2.2.9	Praktische Berechnung von statisch unbestimmten, inhomogenen Zug/Druck- Stäben	45

2.2.10	Zusammenfassung zum Zug/Druck-Stab	48
2.2.11	Aufgaben zu Abschnitt 2.2	48
2.3	Das Kraftgrößenverfahren für statisch unbestimmte Zug/Druck-Stäbe	51
2.3.1	Der Grundgedanke des Kraftgrößenverfahrens	51
2.3.2	Lösungsschritte für das Kraftgrößenverfahren	52
2.3.3	Aufgaben zu Abschnitt 2.3	55
3	Flächenmomente 2. Ordnung	57
3.1	Definitionen von Flächenmomenten 0., 1. und 2. Ordnung	57
3.2	Praktische Auswertung der Flächenintegrale	59
3.3	Parallelverschiebung der Koordinatenachsen: Der Satz von Steiner	75
3.4	Flächenmomente 2. Ordnung für zusammengesetzte Querschnitte	77
3.5	Flächenmomente 2. Ordnung bei Verdrehung der Koordinatenachsen	83
3.6	Hauptträgheitsachsen	85
3.6.1	Achsen der maximalen und minimalen Flächenträgheitsmomente	85
3.6.2	Achsen des maximalen und minimalen Deviationsmomentes	89
3.7	Aufgaben zu Kapitel 3	89
4	Die technische Biegetheorie	95
4.1	Grundlagen	95
4.1.1	Begriffe zur Biegetheorie	95
4.1.2	Einteilungen zur Biegung	96
4.1.3	Voraussetzungen	98
4.2	Die gerade Biegung	99
4.2.1	Annahmen	99
4.2.2	Die Kinematik infolge Biegung	101
4.2.3	Äquivalenzbedingungen für Schnittgrößen und Normalspannungen	102
4.2.4	Die Grundgleichungen der geraden Biegung	103
4.2.5	Auswertung der Grundgleichungen	103
4.2.6	Praktische Berechnung von statisch bestimmten Balkensystemen	105
4.2.7	Praktische Berechnung von statisch unbestimmten Balkensystemen	115
4.2.8	Gerade Biegung mit Normalkraft	121
4.2.9	Symmetrie- und Antisymmetriebedingungen	125
4.2.10	Aufgaben zu Abschnitt 4.2	132
4.3	Schiefe Biegung mit Normalkraft	135
4.3.1	Definitionen von gerader und schiefer Biegung	135
4.3.2	Die Grundgleichungen der schiefen Biegung mit Normalkraft	136
4.3.3	Auswertung der Grundgleichungen	137
4.3.4	1. Sonderfall: Koordinatensystem im Schwerpunkt	138
4.3.5	2. Sonderfall: Transformation auf Hauptachsen	140
4.3.6	3. Sonderfall: Koordinatenachsen sind gleichzeitig Hauptachsen	141
4.3.7	4. Sonderfall: Gerade Biegung ohne Normalkraft	143
4.3.8	Aufgaben zu Abschnitt 4.3	146
4.4	Die Kernfläche eines Querschnitts	149

4.4.1	Grundlagen	149
4.4.2	Praktische Berechnung von Kernflächen	150
4.4.3	Aufgaben zu Abschnitt 4.4	153
4.5	Das Kraftgrößenverfahren für statisch unbestimmte Balkensysteme	154
4.5.1	Der Grundgedanke des Kraftgrößenverfahrens	154
4.5.2	Praktische Berechnung mit dem Kraftgrößenverfahren	155
4.6	Die gerade Biegung mit Normalkraft und Temperaturänderung	159
4.6.1	Herleitung der Grundgleichungen	159
4.6.2	Auswertung der Grundgleichungen	160
4.6.3	Aufgaben zu den Abschnitten 4.5 und 4.6	165
4.7	Das Weggrößenverfahren für statisch unbestimmte Balkensysteme	166
4.7.1	Der Grundgedanke des Weggrößenverfahrens	166
4.7.2	Praktische Berechnung mit dem Weggrößenverfahren	167
4.7.3	Aufgaben zu den Abschnitten 4.7	175
5	Mehrdimensionale Spannungs- und Verzerrungszustände	177
5.1	Der räumliche Spannungszustand	177
5.1.1	Grundlagen	177
5.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	180
5.1.3	Die Äquivalenzbedingungen für den Stab	182
5.2	Der räumliche Verschiebungs- und Verzerrungszustand	183
5.2.1	Verschiebungen	183
5.2.2	Der räumliche Verzerrungszustand	184
5.2.3	Die Volumendehnung	187
5.3	Stoffgesetze	188
5.3.1	Das Hookesche Gesetz für dreidimensionales elastisches Materialverhalten	188
5.3.2	Zusammenhang zwischen E , G und ν	190
5.3.3	Das Elastizitätsgesetz für die Volumendehnung	191
5.3.4	Thermische Dehnungen	192
5.3.5	Chemische Dehnungen	192
5.3.6	Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz	192
5.3.7	Die Grundgleichungen des Thermo-Chemo-Elastizitätsproblems	193
5.4	Der ebene Spannungszustand	197
5.4.1	Definition des ebenen Spannungszustandes	197
5.4.2	Drehung des Koordinatensystems	198
5.4.3	Hauptnormalspannungen	200
5.4.4	Hauptschubspannungen	202
5.4.5	Der Mohrsche Spannungskreis	204
5.4.6	Materialgleichungen für den ebenen Spannungszustand	209
5.5	Der ebene Verzerrungszustand	210
5.5.1	Definition des ebenen Verzerrungszustandes	210
5.5.2	Verzerrungen in gedrehten Koordinatensystemen	210
5.5.3	Materialgleichungen für den ebenen Verzerrungszustand	211

5.6	Der rotationssymmetrische Spannungs- und Verzerrungszustand	214
5.6.1	Definition zur Rotationssymmetrie	214
5.6.2	Stoffgesetze für Rotationssymmetrie	215
5.7	Grundlagen der Festigkeitslehre für mehrachsige Spannungszustände	218
5.7.1	Einfluss der Materialeigenschaft	218
5.7.2	Einfluss des Spannungszustandes: Die Vergleichsspannungshypothese	219
5.7.3	Hauptnormalspannungshypothese nach Rankine	220
5.7.4	Schubspannungshypothese nach Tresca	220
5.7.5	Deviatorspannungshypothese nach (Huber, Hencky) von Mises	222
5.8	Aufgaben zu Kapitel 5	224
6	Schubspannungen in Biegebalken	231
6.1	Definitionen zur Schubspannung	231
6.2	Schubspannungen infolge Querkraft in dickwandigen Querschnitten	234
6.2.1	Voraussetzungen und Annahmen	234
6.2.2	Herleitung der Schubspannungsformel aus Gleichgewicht	235
6.3	Schubspannungen infolge Querkraft in dünnwandigen Querschnitten	240
6.3.1	Voraussetzungen und Annahmen	240
6.3.2	Herleitung der Schubspannungsformel aus Gleichgewicht	241
6.3.3	Praktische Berechnung von Schubspannungen	244
6.4	Der Schubmittelpunkt von dünnwandigen Querschnitten	248
6.4.1	Grundlagen	248
6.4.2	Praktische Berechnung des Schubmittelpunktes	251
6.5	Der schubweiche Balken nach Tymoschenko	255
6.5.1	Grundlagen	255
6.5.2	Voraussetzungen und Annahmen	255
6.5.3	Herleitung der Grundgleichungen	256
6.5.4	Auswertung der Grundgleichungen	257
6.6	Aufgaben zu Kapitel 6	259
7	Die technische Torsionstheorie	265
7.1	Grundlagen	265
7.1.1	Begriffe zur technischen Torsionstheorie	265
7.1.2	Einteilungen zur Torsion	266
7.1.3	Voraussetzungen	267
7.1.4	Die Gleichgewichtsbedingung	268
7.2	Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten	268
7.2.1	Voraussetzungen und Annahmen	268
7.2.2	Herleitung der Grundgleichungen	269
7.2.3	Auswertung der Grundgleichungen	270
7.2.4	Dimensionierung von Wellen	278
7.2.5	Schraubenfedern: Schubspannungen und Steifigkeiten	280
7.3	St.-Venantsche Torsion dünnwandiger geschlossener Querschnitte	281
7.3.1	Voraussetzungen und Annahmen	281

7.3.2	Herleitung der Grundgleichungen	283
7.3.3	Auswertung der Grundgleichungen	285
7.3.4	Berechnung der Verwölbung	287
7.4	St.-Venantsche Torsion dünnwandiger offener Querschnitte	292
7.4.1	Voraussetzungen und Annahmen	292
7.4.2	Dünnwandige Rechteckquerschnitte	293
7.4.3	Zusammengesetzte dünnwandige offene geradlinige Querschnitte	294
7.4.4	Zusammengesetzte dünnwandige offene Querschnitte	296
7.5	St.-Venantsche Torsion beliebiger Querschnitte	298
7.5.1	Voraussetzungen und Annahmen	298
7.5.2	Herleitung der Grundgleichungen	298
7.5.3	Auswertung der Grundgleichungen mit der Torsionsfunktion	300
7.5.4	Analogien zur Torsion beliebiger Querschnitte	303
7.6	Kombinierte Beanspruchung von Stabsystemen	308
7.7	Aufgaben zu Kapitel 7	313
8	Energiemethoden der Elastostatik	319
8.1	Äußere Arbeit und komplementäre Arbeit	319
8.2	Die Arbeitssätze von Betti und Maxwell	323
8.3	Zwei Arbeitssätze der Elastostatik	327
8.3.1	Der homogene Zug/Druck-Stab	327
8.3.2	Der dreidimensionale Körper unter mechanischer Belastung	329
8.3.3	Komplementäre Formänderungsenergien des Einzelstabes	331
8.3.4	Der Arbeitssatz für Stabsysteme	333
8.4	Die Methode der Hilfskräfte	336
8.4.1	Der Balken unter mechanischer Belastung	336
8.4.2	Der Stab unter thermo-mechanischer Belastung	339
8.4.3	Die Überlagerungstabellen	342
8.4.4	Das Kraftgrößenverfahren für statisch unbestimmte Systeme	345
8.4.5	Der Reduktionssatz	350
8.4.6	Aufgaben zu den Abschnitten 8.3 und 8.4	354
8.5	Die Sätze von Engesser, Castigliano und Menabrea	360
8.5.1	Der Satz von Engesser und 1. Satz von Castigliano	360
8.5.2	Der Satz von Menabrea	363
8.5.3	Der 2. Satz von Castigliano	366
8.5.4	Aufgaben zu Abschnitt 8.5	369
8.6	Zwei virtuelle Arbeitsprinzipien der Elastostatik	370
8.6.1	Virtuelle Verformungs- und Kraftgrößen	370
8.6.2	Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	371
8.6.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	373
8.6.4	Aufgaben zu Abschnitt 8.6	377
8.7	Die Finite-Elemente-Methode für den Balken	378
8.7.1	Diskretisierung, Prinzip der virtuellen Verschiebungen, N - und B -Matrizen	378

8.7.2	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte: Herleitung der Elementlastmatrix	380
8.7.3	Virtuelle Formänderungsarbeit: Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix	382
8.7.4	Vier Eigenschaften der Elementsteifigkeitsmatrix	383
8.7.5	Herleitung des Finite-Elemente-Gleichungssystems durch Assemblierung	383
8.7.6	Lösung des Finite-Elemente-Gleichungssystems	386
8.7.7	Berechnung von Lagerreaktionen und Schnittgrößen durch Rückrechnung	386
8.7.8	Aufgaben zu Abschnitt 8.7	389
8.8	Potenzialfunktionen	390
8.8.1	Eigenschaften von Potenzialkräften	390
8.8.2	Der Satz vom stationären Wert des Gesamtpotenzials	392
8.8.3	Aufgaben zu Abschnitt 8.8	394
8.9	Zusammenfassung zu Energiemethoden	395
9	Stabilität elastischer Stäbe	397
9.1	Einführung	397
9.2	Kritische Lasten nach Theorie 2. Ordnung	398
9.2.1	Der Eulersche Knickstab (der 2. Euler-Fall)	398
9.2.2	Elastische Stäbe mit beliebigen Randbedingungen	399
9.2.3	Praktische Berechnung von kritischen Lasten elastischer Stabsysteme	401
9.2.4	Die vier Eulerschen Knickfälle	404
9.2.5	Statische Ersatzsysteme mit Hilfe von Ersatzfedersteifigkeiten	405
9.2.6	Näherungslösungen von Eigenwertgleichungen für Druckstäbe mit einer Feder	407
9.2.7	Die Euler-Hyperbel	410
9.3	Energiemethoden zur Stabilität	411
9.3.1	Energetische Eigenschaften von Gleichgewichtslagen	411
9.3.2	Das Gesamtpotenzial des elastischen Biegestabes	413
9.3.3	Praktische Berechnung zur energetischen Untersuchung der Stabilität	413
9.3.4	Energetisches Näherungsverfahren: Der Rayleigh-Quotient	415
9.4	Biegeknicke elastischer Stäbe	418
9.5	Aufgaben zu Kapitel 9	420
10	Einführung in Hybridstrukturen	425
10.1	Grundlagen	425
10.2	Ideelle Querschnittswerte für Hybridquerschnitte	426
10.2.1	Definitionen von ideellen Querschnittswerten	426
10.2.2	Ideelle Flächenmomente 2. Ordnung bei Verschiebung der Koordinatenachsen	429
10.2.3	Ideelle Flächenmomente 2. Ordnung bei Verdrehung der Koordinatenachsen	431
10.3	Schiefe Biegung mit Normalkraft von Hybridbalken	435

10.3.1	Voraussetzungen und Annahmen	435
10.3.2	Die Grundgleichungen der schiefen Biegung des Hybridbalkens	435
10.3.3	Auswertung der Grundgleichungen	436
10.3.4	1. Sonderfall: Koordinatensystem im ideellen Schwerpunkt	437
10.3.5	2. Sonderfall: Transformation auf ideale Hauptachsen	438
10.3.6	3. Sonderfall: Koordinatenachsen sind gleichzeitig ideale Hauptachsen	440
10.3.7	4. Sonderfall: Gerade Biegung ohne Normalkraft	441
10.4	Schubspannungen infolge Querkraft in Hybridquerschnitten	446
10.5	Der ideale Schubmittelpunkt von dünnwandigen Hybridquerschnitten	449
10.6	Torsion von Hybridstäben	451
10.7	Stabilität elastischer Hybridstäbe	454
10.8	Aufgaben zu Kapitel 10	455
A	Anhang	459
A	Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip	459
B	Lineare Näherungen von nichtlinearen Funktionen	461
C	Unbestimmte Integrale, siehe z.B. [4]	462
D	Trigonometrische Beziehungen, siehe z.B. [4]	462
E	Beweise zu zwei virtuellen Arbeitsprinzipien im dreidimensionalen Fall	463
E.1	Grundlagen	463
E.2	Die statische Randbedingung	463
E.3	Beweis zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.)	464
E.4	Beweis zum Prinzip der virtuellen Kräfte (P.d.v.K.)	465
F	Das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabsysteme	466
G	Die Methode der Hilfskräfte für thermo-mechanische Belastung	466
H	Lösungen zu den Übungsaufgaben	467
	Literaturverzeichnis	473
	Index	475