

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>I Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1 Signale .....	4
1.2 Systeme .....	4
1.3 Signalverarbeitung .....	6
1.4 Struktur des Buches .....	9
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1 Räume .....	11
2.1.1 Metrischer Raum .....	12
2.1.2 Linearer Raum .....	13
2.1.3 Normierte Räume .....	15
2.1.4 Innenproduktraum .....	16
2.1.5 Unitärer Raum .....	18
2.1.6 Hilbert-Raum .....	20
2.1.7 Basis .....	21
2.2 Integraltransformationen .....	28
2.2.1 Integrationskerne .....	28
2.2.2 Zweidimensionale Transformationen .....	31
2.3 Operatoren .....	32
2.3.1 Lineare Operatoren .....	33
2.3.2 Typen von linearen Operatoren .....	38
2.3.3 Darstellungsmatrix .....	39
2.3.4 Verschiebungsoperator .....	41

2.4	Holomorphe Funktionen .....	42
2.4.1	Cauchy'sche Integralformel .....	42
2.4.2	Laurent-Reihe .....	44
2.4.3	Residuensatz .....	48

## **II Zeitkontinuum 51**

<b>3</b>	<b>Zeitkontinuierliche Signale</b> .....	<b>53</b>
3.1	Funktionsräume .....	53
3.1.1	Signalklassen .....	54
3.1.2	Norm und Innenprodukt von Signalen .....	56
3.1.3	Norm und Innenprodukt mit Belegung .....	58
3.2	Stochastische Signale .....	59
3.2.1	Wahrscheinlichkeit .....	59
3.2.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	60
3.2.3	Stochastische Prozesse .....	65
3.3	Deterministische Signale .....	80
3.3.1	Orthogonale Funktionensysteme .....	80
3.3.2	Biorthogonale Funktionensysteme .....	84
3.4	Fourier-Reihe .....	85
3.5	Fourier-Transformation .....	90
3.5.1	Definition der Fourier-Transformation .....	93
3.5.2	Eigenschaften der Fourier-Transformation .....	96
3.5.3	Energie- und Leistungsdichte .....	101
3.5.4	Cosinus- und Sinus-Transformation .....	102
3.6	Testsignale .....	104
3.6.1	Dirac-Impuls .....	105
3.6.2	Konstantes Signal .....	106
3.6.3	Vorzeichenfunktion .....	107
3.6.4	Einheitssprung .....	107
3.6.5	Komplexe Schwingung .....	107
3.6.6	Rechteckfunktion .....	108
3.6.7	Exponentialimpuls .....	109
3.6.8	Doppelseitige Exponentialfunktion .....	110
3.6.9	Exponentialsignal .....	110
3.6.10	Gauß-Impuls .....	112

3.7	Besonderheiten der Fourier-Transformation .....	114
3.7.1	Leckeffekt .....	114
3.7.2	Gibbs'sches Phänomen .....	117
3.8	Allgemeine Signaleigenschaften .....	122
3.8.1	Zeitdauer-Bandbreite-Produkt .....	122
3.8.2	Riemann-Lebesgue'sches Lemma .....	126
3.9	Verwendung von Fensterfunktionen .....	131
<b>4</b>	<b>Zeitkontinuierliche Systeme</b> .....	<b>133</b>
4.1	Eigenschaften .....	133
4.1.1	Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) .....	138
4.1.2	Mehrgrößensysteme .....	143
4.2	Systembeschreibung durch Differentialgleichungen .....	143
4.2.1	Allgemeine Darstellung .....	143
4.2.2	Zustandsraum .....	144
4.3	Laplace-Transformation .....	149
4.3.1	Definition .....	150
4.3.2	Konvergenz der Laplace-Transformation .....	153
4.3.3	Inverse Laplace-Transformation .....	155
4.3.4	Eigenschaften .....	156
4.3.5	Rücktransformation .....	160
4.3.6	Anwendung bei der Systembeschreibung .....	165
4.3.7	Vergleich zwischen Laplace- und Fourier-Transformation .....	168
4.4	Systemfunktion .....	168
4.4.1	Pol- und Nullstellen .....	170
4.4.2	Verknüpfung von Systemfunktionen .....	173
4.4.3	Frequenzgang .....	177
4.4.4	Bode-Diagramm .....	181
4.4.5	Minimalphasensystem und Allpass .....	184
4.4.6	Strukturdarstellung kontinuierlicher LTI-Systeme .....	189
4.5	Frequenzselektive Filter .....	192
4.5.1	Filtertransformation .....	194
4.5.2	Entwurf normierter Tiefpässe .....	195
4.5.3	Bestimmung der Übertragungsfunktion .....	202
4.6	Hilbert-Transformation .....	204

<b>III</b>	<b>Zeitdiskretisierung</b>	<b>213</b>
<b>5</b>	<b>Zeitdiskrete Signale</b>	<b>215</b>
5.1	Grundlagen .....	215
5.1.1	Zeitdiskretisierung .....	215
5.1.2	Abtasttheorem .....	217
5.1.3	Aliasing .....	222
5.1.4	Rekonstruktion .....	225
5.2	Diskrete Zufallsvariablen .....	230
5.3	Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale .....	231
5.3.1	Definition der Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale .....	231
5.3.2	Eigenschaften der Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale .....	234
5.3.3	Energie- und Leistungsdichte .....	236
5.4	Abtastfrequenz .....	237
5.4.1	Überabtastung .....	238
5.4.2	Unterabtastung .....	246
5.5	Spektralanalyse .....	254
5.5.1	Diskrete Fourier-Transformation (DFT) .....	254
5.5.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT) .....	260
5.5.3	Eigenschaften der DFT .....	261
5.5.4	Auflösung im Zeit- und Frequenzbereich .....	264
5.5.5	DFT einer komplexen Schwingung ohne Leckeffekt .....	266
5.5.6	DFT einer komplexen Schwingung mit Leckeffekt .....	267
5.5.7	Zero-Padding .....	270
5.5.8	Periodogramm .....	271
5.6	Verwendung von Fensterfunktionen .....	272
5.6.1	Definition .....	274
5.6.2	Rechteckfenster .....	274
5.6.3	Dreieckfenster .....	276
5.6.4	Hann-Fenster .....	277
5.6.5	Blackman-Fenster .....	277
5.6.6	Dolph-Tschebyscheff-Fenster .....	278
5.6.7	Zeitdiskretes Gauß-Fenster .....	279
5.6.8	Zusammenfassung .....	280
5.7	Weitere diskrete Transformationen .....	282
5.7.1	Walsh-Transformation .....	282
5.7.2	Allgemeine diskrete Transformation .....	285

<b>6</b>	<b>Zeitdiskrete Systeme</b>	<b>287</b>
6.1	Eigenschaften	287
6.1.1	Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)	290
6.1.2	Mehrgrößensysteme	292
6.2	Systembeschreibung durch Differenzgleichungen	293
6.2.1	Allgemeine Darstellung	293
6.2.2	Zustandsraum	294
6.3	Die z-Transformation	296
6.3.1	Definition	296
6.3.2	Existenz der z-Transformierten	299
6.3.3	Inverse z-Transformation	303
6.3.4	Möglichkeiten der Rücktransformation	303
6.3.5	Eigenschaften	311
6.4	Systemfunktion	315
6.4.1	Pol- und Nullstellen	317
6.4.2	Verknüpfung von Systemen	318
6.4.3	Frequenzgang	319
6.4.4	Minimalphasensystem und Allpass	329
6.4.5	Strukturdarstellung zeitdiskreter LTI-Systeme	332
6.5	Linearphasige Systeme	339
6.5.1	Definition und Eigenschaften	339
6.5.2	Linearphasige FIR-Filter	343
6.6	Zeitdiskrete Darstellung kontinuierlicher Systeme	347
6.6.1	Aufbau	347
6.6.2	Umsetzung der Übertragungsfunktion	348
6.6.3	Impulsinvarianz	348
6.6.4	Pol-/Nullstellenübertragung	349
6.6.5	Numerische Integration	351
6.7	Frequenzselektive Filter	355
6.7.1	Kausales FIR-Filter über Impulsinvarianz	355
6.7.2	Akausales FIR-Filter über die DFT	362
6.7.3	IIR-Filter über die zeitdiskrete Übertragungsfunktion	367
6.7.4	FIR-Filter über Transformation des Frequenzganges	371
6.8	Spezielle zeitdiskrete Filter	375
6.8.1	Zeitdiskrete Hilbert-Transformation	375
6.8.2	Zeitdiskreter Differenzierer	382
6.8.3	Korrektur der Gruppenlaufzeit eines Filters	383

## IV Zeit-Frequenz-Analyse

**389**

<b>7</b>	<b>Signaldarstellung mit Frames</b>	<b>391</b>
7.1	Fensterfunktionen .....	391
7.1.1	Verschiebungsinvarianz .....	393
7.1.2	Effektive Zeitdauer und effektive Bandbreite .....	394
7.2	Skalierung .....	397
7.2.1	Skalierung im Zeit- und Frequenzbereich .....	397
7.2.2	Skalierungsinvarianz .....	400
7.3	Hilbert-Räume .....	400
7.3.1	Basisfunktionen .....	401
7.3.2	Orthonormalität .....	409
7.3.3	Biorthonormalität .....	413
7.3.4	Frames .....	414
7.3.5	Straffe Frames .....	419
7.3.6	Frames mit verschobenen Fensterfunktionen .....	426
<b>8</b>	<b>Kurzzeit-Fourier-Transformation</b>	<b>431</b>
8.1	Kontinuierliche Kurzzeit-Fourier-Transformation .....	431
8.1.1	Definition und Interpretationen .....	431
8.1.2	Spektrogramm .....	436
8.1.3	Verschiebungsinvarianz .....	437
8.1.4	Rekonstruktion des Zeitsignals .....	438
8.1.5	Beispiele zur Kurzzeit-Fourier-Transformation .....	440
8.2	Gabor-Reihe .....	449
8.2.1	Diskretisierung von Zeit- und Frequenzverschiebung .....	449
8.2.2	Abtasttheorem für die Zeit-Frequenz-Verteilung .....	451
8.2.3	Rekonstruktion des Zeitsignals .....	453
8.2.4	Gabor-Reihe als Frame .....	456
8.3	Diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation .....	460
8.3.1	Definition .....	460
8.3.2	Rekonstruktion des zeitdiskreten Signals .....	463
8.3.3	Berechnung der Synthesefunktionen .....	464
8.3.4	Filterbank-Interpretation .....	469
<b>9</b>	<b>Wavelet-Transformation</b>	<b>475</b>
9.1	Kontinuierliche Wavelet-Transformation .....	475
9.1.1	Skalierung des Analysefensters .....	475

9.1.2	Definition der Wavelet-Transformation .....	477
9.1.3	Skalogramm .....	480
9.1.4	Zulässigkeitsbedingung .....	481
9.1.5	Zulässige Wavelet-Signale .....	482
9.2	Eigenschaften .....	486
9.2.1	Verschiebungs- und Affin-Invarianz .....	486
9.2.2	Verteilung der Signalenergie .....	487
9.2.3	Energieerhaltung .....	488
9.2.4	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	490
9.2.5	Lokalisierungseigenschaft .....	491
9.2.6	Reproduzierender Kern .....	492
9.3	Wavelet-Funktionen .....	495
9.3.1	Gabor-Wavelet (Morlet-Wavelet) .....	495
9.3.2	Haar-Wavelet .....	501
9.3.3	Shannon-Wavelet .....	502
9.4	Semidiskrete dyadische Wavelets .....	502
9.4.1	Dyadisch diskretisierter Skalierungsfaktor .....	503
9.4.2	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	505
<b>A</b>	<b>Fourier-Transformationen</b>	<b>509</b>
<b>B</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>515</b>
<b>C</b>	<b>z-Transformation</b>	<b>519</b>
<b>D</b>	<b>Blockschaltbilder</b>	<b>523</b>
<b>E</b>	<b>Beweise</b>	<b>525</b>
E.1	Polarisationsgleichung .....	525
E.2	Zeitdiskrete Poisson'sche Summenformel .....	526
E.3	Innenprodukt von Gabor-Wavelets .....	528
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>531</b>
	<b>Index</b>	<b>535</b>