

Inhaltsverzeichnis¹

EIL I FACHDIDAKTISCHE GRUNDFRAGEN DES MATHEMATIKUNTERRICHTS IN DER SEKUNDARSTUFE II

Verfasser: U.-P. Tietze (Kap. 1, 2, 3, 5), F. Förster (Kap. 4)

AUSWAHL UND BEGRÜNDUNG VON ZIELEN, INHALTEN UND METHODEN.....	1
1 Grundfragen und Entwicklungen in der Curriculumsdiskussion.....	2
1.1 Der Reformaufbruch in den sechziger Jahren und die Konsequenzen als einführendes Beispiel einer Curriculumsdiskussion.....	2
1.2 Historische Entwicklungen und didaktische Strömungen des Mathematikunterrichts.....	4
1.3 Elemente der didaktischen Curriculumsdiskussion.....	10
<i>Exkurs: Globale Curriculumrevision? *</i>	11
<i>Exkurs: Taxonomie und Operationalisierung mathematischer Lernziele *</i>	12
<i>Allgemeinbildung und Unterrichtskultur</i>	12
<i>Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik</i>	15
<i>Exemplarisches Lehren und Lernen</i>	16
<i>Vorstellungen von Lehrern zum Curriculum</i>	17
1.4 Merkmale von Grund- und Leistungskursen.....	17
<i>Grund- und Leistungskurse aus der Sicht des Lehrers</i>	18
2 Zur Begründung von Zielen für den MU in der S II.....	20
2.1 Allgemeine und spezielle inhaltsbezogene Ziele.....	22
<i>Die Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik als allgemeines inhaltsbezogenes Ziel</i>	23
<i>Spezielle inhaltsbezogene Qualifikationen</i>	25
2.2 Allgemeine verhaltensbezogene Ziele.....	27
<i>Ein Katalog allgemeiner verhaltensbezogener Lernziele für den MU der S II</i>	29
<i>Vertiefung: Ergänzende Erläuterung allgemeiner verhaltensbezogener Lernziele *</i>	32
3 Fundamentale Ideen.....	37
<i>Leitideen, bereichsspezifische Strategien, zentrale Mathematisierungsmuster</i>	40
4 Zur Rolle des Rechners im Mathematikunterricht.....	42
<i>Mögliche Funktionen von Rechnern im Mathematikunterricht</i>	45
<i>Wichtige Inhalte in neuem Licht</i>	47
Aufgaben, Wiederholung, Ergänzung.....	48
LERNEN UND LEHREN VON BEGRIFFEN UND REGELN.....	50
Elemente des Begriffs- und Regellerns aus psychologischer Sicht.....	51
<i>Sinnvolles rezeptives Lernen</i>	52
<i>Subjektive Aspekte der Begriffsbildung</i>	54
<i>Repräsentation</i>	55
1 Besonderheiten mathematischer Begriffs- und Theoriebildung.....	56
1.1 Begriffsbildung im Mathematikunterricht.....	57
<i>Zur Bedeutung mathematischer Begriffe</i>	58
1.2 Begriffsentwicklung und Exaktifizieren *.....	60
<i>Exkurs in die Algebra</i>	63
1.3 Elementarisieren – zum Verhältnis von Fach- und Schulmathematik *.....	64
<i>Exkurs: Lern- und Lehrschwierigkeiten *</i>	64
1.1 Einführende Überlegungen.....	65

Abschnitte zur Vertiefung sind mit * gekennzeichnet. Die Numerierung von Bildern und Schemata bezieht sich auf die Kapitel (oberste Gliederungsebene). Die Numerierung von Beispielen und Aufgaben erfolgt auf der Ebene der Hauptabschnitte (zweite Ebene, etwa Beispiel 2 in 2.3).

	<i>Schema und Prozedur</i>	66
	<i>Lernschwierigkeiten in der Algebra</i>	67
2.3.2	Semantischer Aspekt: das Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln	68
2.3.3	Syntaktisch-algorithmischer Aspekt	69
	<i>Das algorithmische Lösen einfacher Aufgaben</i>	69
	<i>„Generalregeln“ als Ursache von Fehlern</i>	72
	<i>Zusätzliche Schwierigkeiten einer „höheren“ Algebra</i>	73
	<i>Folgerungen und Konsequenzen</i>	74
2.4	Formen von Unterricht und Lehrverfahren	74
2.4.1	Einführung	74
	<i>Exkurs: Modell-Lernen *</i>	75
2.4.2	Drei idealtypische Lehrverfahren	76
	<i>Ausubels Verfahren des expositorischen Lehrens</i>	77
	<i>Verfahren des entdeckenlassenden Lehrens im Sinne von Bruner</i>	78
	<i>Der fragend-entwickelnde Unterricht</i>	80
2.5	Methodische Hinweise zum Lehren mathematischer Begriffe, Theorien und Regeln	82
2.5.1	Allgemeine methodische Hinweise und fachdidaktische Prinzipien	82
	<i>Das Anerkennen von Vorwissen</i>	82
	<i>Das Subsumieren unter Oberbegriffe: geeignete Ankerideen und Grundvorstellungen</i>	83
	<i>Fachdidaktische Prinzipien</i>	84
2.5.2	Zur Planung des Begriffs- und Regellehrens	86
	<i>Mittelfristige Planung</i>	86
	<i>Kurzfristige Planung</i>	87
	<i>Verstehen und Verstehenskontrolle</i>	88
	Aufgaben, Wiederholung, Anregungen zur Diskussion	89
3	PROBLEME ENTDECKEN, PROBLEME LÖSEN	91
3.1	Einführendes Beispiel zum Problemlösen	92
	<i>Problemkontext Lineares Optimieren</i>	92
3.2	Charakteristische Aspekte von Problemen	93
	<i>Problemkontext Geometrische Objektstudien</i>	97
3.3	Heuristische Verfahrensregeln und prozeborientierte Hilfen	98
3.3.1	Globale Heuristiken	99
3.3.2	Lokale Heuristiken	102
3.4	Ziele und Methoden eines problemorientierten Unterrichts	108
3.4.1	Vorstellungen über einen problemorientierten Unterricht und seine Ziele	108
3.4.2	Problemorientierung im alltäglichen Unterricht	110
3.4.3	Zur Förderung von Problemlösefähigkeiten	112
	<i>Problemkontext Funktionen, Kurven und deren Krümmung</i>	114
3.5	Exkurs: Empirische Untersuchungen zum Problemlösen *	117
	Quellen für Problemkontexte	119
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion	119
4	ANWENDEN, MATHEMATISIEREN, MODELLBILDEN	121
4.1	Mathematisieren und Modellbilden	121
	<i>Der Modellbildungsprozeß</i>	121
	<i>Deskriptive und normative Modelle</i>	125
	<i>Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung</i>	126
4.2	Tendenzen und Strömungen zur Anwendungsorientierung von MU	128
4.2.1	Historische Entwicklungen und neuere Tendenzen in der fachdidaktischen Diskussion	128
4.2.2	Ziele eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts	131

4.3	Anwendungsorientierung im alltäglichen Mathematikunterricht	133
4.3.1	Unterrichtsbeispiele zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht.....	134
	<i>Das Beispiel „Verkehrsdurchsatz“</i>	134
	<i>Das Beispiel „AIDS-Test“</i>	136
	<i>Von der Einkleidung zum Sachproblem</i>	137
	<i>Kleinvieh macht auch Mist – „Massentierhaltung“ und andere kleine Beispiele</i>	139
4.3.2	Welche Rolle spielt die Anwendungsorientierung in der Unterrichtspraxis?	140
4.3.3	Methodische Einzelfragen zum anwendungsorientierten MU	142
4.4	Exkurs: Numerische Mathematik im anwendungsorientierten MU *	145
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	148
5	BEWEISEN, BEGRÜNDEN, ARGUMENTIEREN.....	151
5.1	Beweisen, Begründen, Argumentieren – eine einführende Analyse.....	151
	<i>Der Beweis in der Fachwissenschaft</i>	151
	<i>Axiomensysteme</i>	152
	<i>Historischer Exkurs zum Beweisen, zur Rolle der Anschauung und der Formalisierung *</i>	153
	<i>Exkurs über die Rolle des Computers beim Beweisen *</i>	155
	<i>Anschauliches und präformales Beweisen; lokales und globales Ordnen</i>	156
	<i>Begründen und Argumentieren – Formen, Darstellung und Allgemeingültigkeit</i>	158
5.2	Zur Praxis des Beweizens	159
5.2.1	Der Begriff der Argumentationsbasis und subjektive Aspekte des Beweizens.....	159
	<i>Definitionen und Schlußregeln als Teil der Argumentationsbasis</i>	161
5.2.2	Praxis des Beweizens im Mathematikunterricht	164
5.3	Zielanalyse zum Begründen und Beweisen	166
5.4	Methodische Überlegungen zum Begründen und Beweisen	169
	<i>Überprüfen und Bewerten von Schülerbeweisen</i>	174
	<i>Kriterien für einen didaktisch guten Beweis</i>	175
	Niederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	176
TEIL II ANALYSIS		
Verfasser: M. Klika (Kap. 6, Abs. 8.1, 8.3), U.-P. Tietze (Kap. 7, Abs. 8.2), F. Förster (Kap. 9)		
	HISTORISCHE ENTWICKLUNG, BEZIEHUNGSNETZE UND FUNDAMENTALE IDEEN.....	178
1.1	Entwicklung der Infinitesimalrechnung.....	179
1.2	Leitideen und fachlicher Hintergrund.....	183
1.2.1	Reelle Zahlen. Funktions-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff.....	184
	<i>Zum Funktionsbegriff</i>	185
	<i>Funktionen von mehreren Variablen</i>	187
	<i>Zum Kurvenbegriff</i>	188
	<i>Zum Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff</i>	188
1.2.2	Ableitung und Integral.....	190
	<i>Zum Ableitungsbegriff</i>	191
	<i>Ableitungsfunktion, Stammfunktion</i>	196
	<i>Globale Sätze</i>	197
	<i>Zum Integralbegriff</i>	198
	<i>Bogenlänge und Krümmung</i>	200
3	Zentrale Mathematisierungsmuster und bereichsspezifische Strategien.....	201
3.1	Verwendungssituationen und Zentrale Mathematisierungsmuster	201
	<i>Mathematisierungsmuster in Physik und Technik</i>	202
	<i>Mathematisierungsmuster in Biologie, Chemie, Medizin</i>	206
	<i>Mathematisierungsmuster in Wirtschafts- und Sozialwissenschaften</i>	207

<i>Schema und Prozedur</i>	66
<i>Lernschwierigkeiten in der Algebra</i>	67
2.3.2 Semantischer Aspekt: das Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln	68
2.3.3 Syntaktisch-algorithmischer Aspekt	69
<i>Das algorithmische Lösen einfacher Aufgaben</i>	69
<i>„Generalregeln“ als Ursache von Fehlern</i>	72
<i>Zusätzliche Schwierigkeiten einer „höheren“ Algebra</i>	73
<i>Folgerungen und Konsequenzen</i>	74
2.4 Formen von Unterricht und Lehrverfahren	74
2.4.1 Einführung	74
<i>Exkurs: Modell-Lernen *</i>	75
2.4.2 Drei idealtypische Lehrverfahren	76
<i>Ausbels Verfahren des expositorischen Lehrens</i>	77
<i>Verfahren des entdeckelassenden Lehrens im Sinne von Bruner</i>	78
<i>Der fragend-entwickelnde Unterricht</i>	80
2.5 Methodische Hinweise zum Lehren mathematischer Begriffe, Theorien und Regeln	82
2.5.1 Allgemeine methodische Hinweise und fachdidaktische Prinzipien	82
<i>Das Anerkennen von Vorwissen</i>	82
<i>Das Subsumieren unter Oberbegriffe: geeignete Ankerideen und Grundvorstellungen</i>	83
<i>Fachdidaktische Prinzipien</i>	84
2.5.2 Zur Planung des Begriffs- und Regellehrens	86
<i>Mittelfristige Planung</i>	86
<i>Kurzfristige Planung</i>	87
<i>Verstehen und Verstehenskontrolle</i>	88
Aufgaben, Wiederholung, Anregungen zur Diskussion	89
3 PROBLEME ENTDECKEN, PROBLEME LÖSEN	91
3.1 Einführendes Beispiel zum Problemlösen	92
<i>Problemkontext Lineares Optimieren</i>	92
3.2 Charakteristische Aspekte von Problemen	93
<i>Problemkontext Geometrische Objektstudien</i>	97
3.3 Heuristische Verfahrensregeln und prozeborientierte Hilfen	98
3.3.1 Globale Heuristiken	99
3.3.2 Lokale Heuristiken	102
3.4 Ziele und Methoden eines problemorientierten Unterrichts	108
3.4.1 Vorstellungen über einen problemorientierten Unterricht und seine Ziele	108
3.4.2 Problemorientierung im alltäglichen Unterricht	110
3.4.3 Zur Förderung von Problemlösefähigkeiten	112
<i>Problemkontext Funktionen, Kurven und deren Krümmung</i>	114
3.5 Exkurs: Empirische Untersuchungen zum Problemlösen *	117
Quellen für Problemkontexte	119
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion	119
4 ANWENDEN, MATHEMATISIEREN, MODELLBILDEN	121
4.1 Mathematisieren und Modellbilden	121
<i>Der Modellbildungsprozeß</i>	121
<i>Deskriptive und normative Modelle</i>	125
<i>Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung</i>	126
4.2 Tendenzen und Strömungen zur Anwendungsorientierung von MU	128
4.2.1 Historische Entwicklungen und neuere Tendenzen in der fachdidaktischen Diskussion	128
4.2.2 Ziele eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts	131

4.3	Anwendungsorientierung im alltäglichen Mathematikunterricht	133
4.3.1	Unterrichtsbeispiele zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht.....	134
	<i>Das Beispiel „Verkehrsdurchsatz“</i>	134
	<i>Das Beispiel „AIDS-Test“</i>	136
	<i>Von der Einkleidung zum Sachproblem.....</i>	137
	<i>Kleinvieh macht auch Mist – „Massentierhaltung“ und andere kleine Beispiele</i>	139
4.3.2	Welche Rolle spielt die Anwendungsorientierung in der Unterrichtspraxis?	140
4.3.3	Methodische Einzelfragen zum anwendungsorientierten MU	142
4.4	Exkurs: Numerische Mathematik im anwendungsorientierten MU *	145
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	148
5	BEWEISEN, BEGRÜNDEN, ARGUMENTIEREN.....	151
5.1	Beweisen, Begründen, Argumentieren – eine einführende Analyse.....	151
	<i>Der Beweis in der Fachwissenschaft</i>	151
	<i>Axiomensysteme</i>	152
	<i>Historischer Exkurs zum Beweisen, zur Rolle der Anschauung und</i> <i>der Formalisierung *</i>	153
	<i>Exkurs über die Rolle des Computers beim Beweisen *</i>	155
	<i>Anschauliches und präformales Beweisen; lokales und globales Ordnen.....</i>	156
	<i>Begründen und Argumentieren – Formen, Darstellung und Allgemeingültigkeit</i>	158
5.2	Zur Praxis des Beweisen	159
5.2.1	Der Begriff der Argumentationsbasis und subjektive Aspekte des Beweisen.....	159
	<i>Definitionen und Schlußregeln als Teil der Argumentationsbasis.....</i>	161
5.2.2	Praxis des Beweisen im Mathematikunterricht	164
5.3	Zielanalyse zum Begründen und Beweisen	166
5.4	Methodische Überlegungen zum Begründen und Beweisen	169
	<i>Überprüfen und Bewerten von Schülerbeweisen</i>	174
	<i>Kriterien für einen didaktisch guten Beweis</i>	175
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	176

TEIL II ANALYSIS

Verfasser: M. Klika (Kap. 6, Abs. 8.1, 8.3), U.-P. Tietze (Kap. 7, Abs. 8.2), F. Förster (Kap. 9)

5	HISTORISCHE ENTWICKLUNG, BEZIEHUNGSNETZE UND FUNDAMENTALE IDEEN.....	178
5.1	Entwicklung der Infinitesimalrechnung.....	179
5.2	Leitideen und fachlicher Hintergrund.....	183
5.2.1	Reelle Zahlen, Funktions-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff	184
	<i>Zum Funktionsbegriff</i>	185
	<i>Funktionen von mehreren Variablen</i>	187
	<i>Zum Kurvenbegriff.....</i>	188
	<i>Zum Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff</i>	188
5.2.2	Ableitung und Integral.....	190
	<i>Zum Ableitungsbegriff</i>	191
	<i>Ableitungsfunktion, Stammfunktion</i>	196
	<i>Globale Sätze</i>	197
	<i>Zum Integralbegriff</i>	198
	<i>Bogenlänge und Krümmung</i>	200
5.3	Zentrale Mathematisierungsmuster und bereichsspezifische Strategien.....	201
5.3.1	Verwendungssituationen und Zentrale Mathematisierungsmuster	201
	<i>Mathematisierungsmuster in Physik und Technik</i>	202
	<i>Mathematisierungsmuster in Biologie, Chemie, Medizin</i>	206
	<i>Mathematisierungsmuster in Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.....</i>	207

6.3.2 Bereichsspezifische Strategien	211
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion	216
7 ALLGEMEINE DIDAKTISCHE FRAGEN ZUM ANALYSISUNTERRICHT	218
7.1 Fachdidaktische Strömungen und Entwicklungen zum Analysisunterricht	218
7.1.1 Ein historischer Überblick.....	218
7.1.2 Positionen gegen die Neue Mathematik	220
7.1.3 Positionen gegen das Vorherrschende „sinnentleerte Kalküle“	221
<i>Problemorientierung</i>	222
<i>Anwendungsorientierung</i>	223
<i>Der Rechner im Analysisunterricht</i>	224
<i>Schülerorientierte Analysis – eine andere Unterrichtskultur</i>	226
7.1.4 Das Schulbuch im Analysisunterricht	228
7.2 Der Analysisunterricht aus der Sicht des Lehrers.....	232
<i>Der formale und der anwendungsbezogene Aspekt der Analysis</i>	234
7.3 Der Schüler im Analysisunterricht	236
<i>Das „Analysis-Bild“ des Schülers</i>	236
<i>Algebrabezogene Lernprobleme im Analysisunterricht</i>	236
<i>Graphen- und anschauungsbezogene Schwierigkeiten und Probleme zur</i> <i>Beziehung zwischen formalem und graphischem Aspekt</i>	238
<i>Begrifflich-logische Probleme</i>	238
7.4 Zur Rechtfertigung und zur Realisierung eines veränderten Analysisunterrichts	240
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion	241
8 DIDAKTISCHE DISKUSSION VON EINZELTHEMEN	244
8.1 Reelle Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit.....	244
8.1.1 Reelle Zahlen	244
8.1.2 Funktionen	245
<i>Transzendente Funktionen</i>	248
<i>Zur Exponentialfunktion</i>	249
<i>Zur Logarithmusfunktion</i>	250
<i>Zu trigonometrischen Funktionen</i>	250
<i>Funktionen von mehreren Veränderlichen</i>	251
8.1.3 Folgen-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff.....	252
<i>Zum Stetigkeitsbegriff</i>	255
8.2 Differentialrechnung	257
8.2.1 Einführung des Ableitungsbegriffs	257
<i>Zwei Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff</i>	257
<i>Zum Begriff der Tangente</i>	259
<i>Einstiege in die Differentialrechnung</i>	261
<i>Ableitungsfunktion, Stammfunktion, graphisches Ab- und Aufleiten</i>	263
8.2.2 Ableitungsregeln und die Ableitung elementarer Funktionen.....	264
<i>Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen</i>	264
<i>Produkt-, Quotienten- und Kettenregel</i>	265
<i>Ableitung der Winkelfunktionen</i>	267
<i>Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktionen</i>	268
8.2.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung	271
<i>Monotonie und Krümmung</i>	271
<i>Lokale Eigenschaften von Funktionen (Extrem- und Wendestellen)</i>	272
<i>Extremwertaufgaben und Funktionsbestimmungen</i>	273
<i>Approximation und Interpolation</i>	274
8.2.4 Exaktifizierungen und Vertiefungen	275
<i>Begriffsklärungen und Erörterung von Fehlvorstellungen</i>	275

<i>Ein lokales und globales Ordnen der zentralen Sätze der Analysis</i>	276
<i>Vertiefende Betrachtungen zur Approximation</i>	277
3 Zur Integralrechnung	279
3.1 Grundverständnis und Zugänge zum Integralbegriff	280
<i>Andere Zugänge</i>	284
3.2 Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.....	284
3.3 Integrationskalkül und Numerische Verfahren	287
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	292
BEISPIELE ZUR PROBLEM- UND ANWENDUNGSORIENTIERUNG IM ANALYSISUNTERRICHT	296
1 Funktionen, Kurven, Kurvenscharen und graphikfähige TR.....	296
1.1 Einführung in das Arbeiten mit dem graphikfähigen Taschenrechner	296
1.2 Beispiele zur Untersuchung von Funktionen und Kurvenscharen	300
<i>Ortskurven von Parabelscharen</i>	300
<i>Klassifikation einer Funktionsschar</i>	301
<i>Kurvenscharen: Rollkurven (Kreiszykloiden)</i>	302
2 Optimieren, Interpolieren und Approximieren	304
2.1 Das Extremwertproblem „Milchtüte“	306
2.2 Das allgemeine isoperimetrische Problem.....	308
2.3 Die „Trassierung von Autobahnkreuzen“	309
3 Wachstumsfragen und Dynamische Systeme	311
3.1 Wachstumsfragen: Differentialgleichungen, Differenzgleichungen	311
<i>Einfache Wachstumsmodelle</i>	312
<i>Differenzgleichungen oder Differentialgleichungen im MU?</i>	315
<i>Exkurs: Chaos bei der logistischen Abbildung *</i>	316
3.2 Systemdynamik *	317
<i>Die Sensitivität von Systemen</i>	318
<i>Vernetzung – Wechselwirkung zwischen Populationen, Räuber-Beute-Systeme</i>	318
<i>Zeitverzögerte Rückkopplungen</i>	320
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	322
TERATURVERZEICHNIS	325
STICHWORTVERZEICHNIS	341