

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Ziel dieses Buches . . . . .  | 2         |
| 1.2      | Historisches zur Lehre von Mathematik . . . . .                           | 2         |
| 1.3      | Vorgehen in diesem Buch . . . . .   | 3         |
| 1.4      | Die Kapitel . . . . .   | 4         |
| 1.5      | Einige Bemerkungen . . . . .  | 8         |
| <b>2</b> | <b>Kryptografie</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1      | Die alte und die neue Kryptografie . . . . .                              | 10        |
| 2.1.1    | Alphabetische Verschlüsselung . . . . .                                   | 10        |
| 2.1.2    | Verschlüsseln mit dem One-Time-Pad . . . . .                              | 13        |
| 2.2      | Primzahlen . . . . .  | 14        |
| 2.2.1    | Faktorensuchen ist schwer . . . . .                                       | 15        |
| 2.2.2    | Die Menge der Primzahlen . . . . .  | 16        |
| 2.3      | Restklassen modulo $n$ . . . . .  | 17        |
| 2.3.1    | Vorschau auf die kryptografischen Rechnungen . . . . .                    | 18        |
| 2.3.2    | Der Modul der Restklassen modulo $n$ . . . . .                            | 19        |
| 2.3.3    | Allgemeines Rechnen modulo $n$ . . . . .                                  | 20        |
| 2.3.4    | Multiplizieren modulo $n$ . . . . .                                       | 22        |
| 2.3.5    | Potenzieren modulo $n$ . . . . .  | 24        |
| 2.3.6    | Inversenbestimmung modulo $n$ . . . . .                                   | 28        |
| 2.4      | Euklidischer Algorithmus und der ggT . . . . .                            | 29        |
| 2.4.1    | Inversenbestimmung mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus . . . . . | 31        |
| 2.5      | Kryptografische Verfahren . . . . .                                       | 32        |
| 2.5.1    | Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung . . . . .                            | 33        |
| 2.5.2    | RSA-Verschlüsselung . . . . .   | 35        |
| 2.5.3    | Digitale Signatur . . . . .   | 40        |
| 2.5.4    | Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel . . . . .                       | 41        |
| 2.6      | Rückblick auf die moderne Kryptografie . . . . .                          | 43        |
| <b>3</b> | <b>Codierung</b>  | <b>45</b> |
| 3.1      | Europäische Artikelnummer: EAN . . . . .                                  | 45        |
| 3.1.1    | Prüfung der EAN und Berechnung der Prüfziffer . . . . .                   | 46        |
| 3.1.2    | Aufbau des Strichcodes . . . . .  | 48        |
| 3.2      | Buchnummern ISBN-10 und ISBN-13 . . . . .                                 | 49        |
| 3.2.1    | Eigenschaften und Prüfung der alten ISBN-10 . . . . .                     | 50        |
| 3.2.2    | Vor- und Nachteile der neuen ISBN-13 . . . . .                            | 51        |
| 3.3      | IBAN, die internationale Bankkontonummer . . . . .                        | 52        |
| 3.3.1    | Aufbau der IBAN . . . . .   | 52        |
| 3.3.2    | Bestimmung der IBAN-Prüfzahl . . . . .                                    | 53        |
| 3.4      | Codierung mit 0 und 1 ist überall . . . . .                               | 54        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.4.1    | Fehlerkorrigierende Codes . . . . .                          | 55        |
| 3.5      | QR-Code, das gescheckte Quadrat . . . . .                    | 58        |
| 3.5.1    | Aufbau des QR-Codes . . . . .                                | 58        |
| 3.5.2    | Für Sie erfunden: Zwerg-QR-Code . . . . .                    | 59        |
| 3.6      | Rückblick auf die Codierung . . . . .                        | 61        |
| <b>4</b> | <b>Graphentheorie und Knotentheorie</b>                      | <b>63</b> |
| 4.1      | Allerlei Graphen . . . . .                                   | 63        |
| 4.1.1    | Euler, Königsberg und Graphen . . . . .                      | 64        |
| 4.1.2    | Beschreibung von Graphen . . . . .                           | 68        |
| 4.2      | Aufspannende Bäume . . . . .                                 | 70        |
| 4.2.1    | Minimale Spannbäume . . . . .                                | 71        |
| 4.2.2    | Spannbäume in ungewichteten Graphen . . . . .                | 72        |
| 4.3      | Kürzeste Wege . . . . .                                      | 74        |
| 4.3.1    | Kürzeste Wege in gewichteten Graphen . . . . .               | 75        |
| 4.3.2    | Dijkstra-Algorithmus . . . . .                               | 76        |
| 4.4      | Färbungen . . . . .  | 79        |
| 4.4.1    | Konfliktgraphen . . . . .                                    | 79        |
| 4.4.2    | Landkartenfärbung . . . . .                                  | 81        |
| 4.5      | Knotentheorie . . . . .                                      | 82        |
| 4.5.1    | Definitionen der Knotentheorie . . . . .                     | 83        |
| 4.5.2    | Aufgabe der Knotentheorie . . . . .                          | 85        |
| 4.5.3    | Primknoten strukturieren die Knotentheorie . . . . .         | 86        |
| 4.5.4    | Dreifärbbarkeit als Knoteninvariante . . . . .               | 87        |
| 4.5.5    | Die $p$ -Etikettierbarkeit als Knoteninvariante . . . . .    | 90        |
| 4.5.6    | Das Alexander-Polynom als Knoteninvariante . . . . .         | 93        |
| 4.5.7    | Verschlingungen und Zöpfe . . . . .                          | 95        |
| 4.6      | Graphen- und Knotentheorie: Rückblick und Ausblick . . . . . | 97        |
| <b>5</b> | <b>Fraktale, Chaos, Ordnung</b>                              | <b>99</b> |
| 5.1      | Idee von Rekursion und Iteration . . . . .                   | 101       |
| 5.1.1    | Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen . . . . .              | 102       |
| 5.1.2    | Wachstumsvorgänge . . . . .                                  | 104       |
| 5.1.3    | Feigenbaumdiagramm . . . . .                                 | 106       |
| 5.2      | Fraktale und Dimension . . . . .                             | 109       |
| 5.2.1    | Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme . . . . .                   | 109       |
| 5.2.2    | Selbstähnlichkeit und Dimension . . . . .                    | 113       |
| 5.2.3    | Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS) . . . . .                 | 115       |
| 5.3      | Mandelbrot- und Julia-Mengen . . . . .                       | 120       |
| 5.3.1    | Das echte Apfelmännchen . . . . .                            | 120       |
| 5.3.2    | Julia-Mengen . . . . .                                       | 125       |
| 5.4      | Muster der Natur . . . . .                                   | 128       |
| 5.4.1    | Zelluläre Automaten . . . . .                                | 128       |
| 5.4.2    | Spiralen mit goldenem Winkel . . . . .                       | 131       |
| 5.4.3    | Spiralen mit Fibonacci-Zahlen . . . . .                      | 134       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Welt der Funktionen</b>                            | <b>137</b> |
| 6.1      | Funktionenfamilien . . . . .                          | 140        |
| 6.1.1    | Parabeln und elementare Variationen . . . . .         | 140        |
| 6.1.2    | Geraden und Potenzfunktionen . . . . .                | 147        |
| 6.1.3    | Polynome in ihrer Vielfalt . . . . .                  | 150        |
| 6.1.4    | Sinus, Kosinus und Musik . . . . .                    | 157        |
| 6.1.5    | Exponentialfunktionen . . . . .                       | 162        |
| 6.1.6    | Umkehrfunktionen . . . . .                            | 164        |
| 6.2      | Funktionenbauhof . . . . .                            | 167        |
| 6.2.1    | Summe von Funktionen . . . . .                        | 167        |
| 6.2.2    | Produkt von Funktionen . . . . .                      | 169        |
| 6.2.3    | Verkettung von Funktionen . . . . .                   | 170        |
| 6.3      | Blick auf den Punkt: Ableitung . . . . .              | 171        |
| 6.3.1    | Ableitungsfunktion . . . . .                          | 172        |
| 6.3.2    | Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet . . . . . | 177        |
| 6.4      | Blick auf das Ganze: das Integral . . . . .           | 179        |
| 6.4.1    | Definition des Integrals . . . . .                    | 182        |
| 6.4.2    | Weitere Anwendungen des Integrals . . . . .           | 185        |
| 6.5      | Großartiger Zusammenhang . . . . .                    | 186        |
| 6.5.1    | Teppich abrollen mit der Integralfunktion . . . . .   | 187        |
| 6.6      | Funktionen in höheren Räumen . . . . .                | 191        |
| 6.6.1    | Funktionen im 3D-Raum . . . . .                       | 191        |
| 6.6.2    | Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen . . . . .       | 195        |
| 6.6.3    | Noch höher hinaus . . . . .                           | 198        |
| <b>7</b> | <b>Optimierung als Ziel</b>                           | <b>201</b> |
| 7.1      | Extremwertaufgaben . . . . .                          | 201        |
| 7.2      | Gewinnoptimierung . . . . .                           | 204        |
| 7.3      | Lineare Optimierung . . . . .                         | 204        |
| 7.4      | Minimalflächen . . . . .                              | 206        |
| 7.5      | Methode der kleinsten Quadrate . . . . .              | 208        |
| 7.6      | Optimierung ist überall . . . . .                     | 210        |
| <b>8</b> | <b>Computer und Mathematik</b>                        | <b>211</b> |
| 8.1      | Binärsystem . . . . .                                 | 212        |
| 8.1.1    | Zahlenhellseher . . . . .                             | 214        |
| 8.1.2    | Plus und Mal mit Binärzahlen . . . . .                | 215        |
| 8.1.3    | Subtraktion mit Trick . . . . .                       | 215        |
| 8.1.4    | Binäre Kommazahlen . . . . .                          | 216        |
| 8.2      | Zahldarstellung im Computer . . . . .                 | 217        |
| 8.2.1    | Experimente mit Kommazahlen in Computern . . . . .    | 218        |
| 8.2.2    | Maschinengenauigkeit . . . . .                        | 219        |
| 8.2.3    | Binäre Gleitkommazahlen in Computern . . . . .        | 220        |
| 8.3      | Numerisch arbeitende Werkzeuge . . . . .              | 221        |
| 8.3.1    | Software für numerische Aufgaben . . . . .            | 222        |
| 8.3.2    | Numerik ist überall . . . . .                         | 222        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.3.3     | Tabellenkalkulationen . . . . .                                   | 222        |
| 8.4       | Dynamische Mathematik . . . . .                                   | 223        |
| 8.4.1     | Dynamische-Geometrie-Systeme (DGS) . . . . .                      | 224        |
| 8.4.2     | Dynamische-3D-Geometrie . . . . .                                 | 225        |
| 8.4.3     | Vom Taschenrechner zum Handheld-Computer . . . . .                | 226        |
| 8.5       | Computer-Algebra-Systeme (CAS) . . . . .                          | 227        |
| 8.5.1     | Die Mächtigkeit der CAS . . . . .                                 | 228        |
| 8.5.2     | Computer in nicht-numerischen Anwendungen . . . . .               | 229        |
| 8.6       | Berechenbarkeit . . . . .   | 229        |
| 8.6.1     | Berechenbar, aber nicht effektiv berechenbar . . . . .            | 231        |
| 8.6.2     | Komplexität von Programmen . . . . .                              | 231        |
| 8.6.3     | Die Klasse der NP-vollständigen Probleme . . . . .                | 232        |
| 8.6.4     | Nutzen der Computerbeschränkungen . . . . .                       | 233        |
| 8.7       | Computer in unserer Welt . . . . .                                | 234        |
| <b>9</b>  | <b>Numerik</b> . . . . .  | <b>235</b> |
| 9.1       | Numerische Verfahren der Analysis . . . . .                       | 235        |
| 9.1.1     | Heron-Verfahren für Wurzeln . . . . .                             | 235        |
| 9.1.2     | Nullstellensuche . . . . .  | 237        |
| 9.1.3     | Numerische Integration . . . . .                                  | 240        |
| 9.2       | Für alle Fälle: Polynome . . . . .                                | 244        |
| 9.2.1     | Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen . . . . .   | 244        |
| 9.2.2     | Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen . . . . .              | 246        |
| 9.2.3     | Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird . . . . .     | 247        |
| 9.2.4     | Bézier-Splines: frei gestaltete Formen . . . . .                  | 248        |
| 9.3       | Fourier-Reihen . . . . .  | 250        |
| 9.3.1     | Klangfarben . . . . .   | 251        |
| 9.3.2     | Aufstellen der Fourier-Reihe für periodische Funktionen . . . . . | 252        |
| 9.4       | Differenzialgleichungen . . . . .                                 | 254        |
| 9.5       | Ohne Numerik geht es nicht . . . . .                              | 255        |
| <b>10</b> | <b>Stochastik</b> . . . . .                                       | <b>257</b> |
| 10.1      | Beschreibende Statistik . . . . .                                 | 257        |
| 10.1.1    | Fehler in der beschreibenden Statistik . . . . .                  | 257        |
| 10.1.2    | Regression . . . . .  | 259        |
| 10.2      | Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .                              | 259        |
| 10.2.1    | Der Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .                          | 259        |
| 10.2.2    | Axiome von Kolmogorow . . . . .                                   | 262        |
| 10.2.3    | Mehrstufige Zufallsversuche . . . . .                             | 264        |
| 10.2.4    | Simulation der Gleichverteilung . . . . .                         | 266        |
| 10.3      | Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung . . . . .             | 267        |
| 10.3.1    | Krüge für den Handwerkermarkt . . . . .                           | 267        |
| 10.3.2    | Kombinatorik . . . . .  | 269        |
| 10.4      | Verteilungen . . . . .  | 272        |
| 10.4.1    | Binomialverteilung . . . . .                                      | 272        |
| 10.4.2    | Simulation von Bernoulli-Ketten . . . . .                         | 277        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 10.4.3    | Simulation der Binomialverteilung und Beispiele . . . . . | 279        |
| 10.4.4    | Kumulierte Verteilungsfunktionen . . . . .                | 281        |
| 10.4.5    | Normalverteilung . . . . .                                | 282        |
| 10.5      | Beurteilende Statistik . . . . .                          | 289        |
| 10.6      | Beurteilende Statistik: Schätzen . . . . .                | 290        |
| 10.6.1    | Intervallschätzung im binomialen Fall . . . . .           | 290        |
| 10.6.2    | Intervallschätzung im normalverteilten Fall . . . . .     | 292        |
| 10.7      | Beurteilende Statistik: Testen . . . . .                  | 292        |
| 10.7.1    | Hypothesentest im binomialen Fall . . . . .               | 293        |
| 10.7.2    | Allgemeine Vorgehensweise beim Signifikanztest . . . . .  | 296        |
| 10.7.3    | Deutung der Unsicherheit beim Signifikanztest . . . . .   | 299        |
| 10.7.4    | Hypothesentest mit den $z$ -sigma-Grenzen . . . . .       | 299        |
| 10.7.5    | Trennschärfe eines Tests . . . . .                        | 300        |
| 10.7.6    | Hypothesentest bei Messreihen . . . . .                   | 301        |
| 10.8      | Stochastische Prozesse . . . . .                          | 302        |
| 10.8.1    | Markow-Ketten . . . . .                                   | 302        |
| 10.8.2    | Warteschlangen . . . . .                                  | 308        |
| 10.9      | Stochastik im Rückblick . . . . .                         | 314        |
| <b>11</b> | <b>Geometrie</b> . . . . .                                | <b>315</b> |
| 11.1      | Der goldene Schnitt . . . . .                             | 316        |
| 11.1.1    | Interaktive Erkundung des goldenen Schnittes . . . . .    | 319        |
| 11.2      | Die Kegelschnitte . . . . .                               | 321        |
| 11.2.1    | Namensgeheimnis der Kegelschnitte . . . . .               | 322        |
| 11.3      | Reflexion bei Parabeln . . . . .                          | 325        |
| 11.3.1    | Konstruktion der Reflexion . . . . .                      | 326        |
| 11.3.2    | Anwendungen der Parabelreflexion . . . . .                | 326        |
| 11.3.3    | Die Parabel und ihre Leitgerade . . . . .                 | 327        |
| 11.4      | Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln . . . . .            | 329        |
| 11.4.1    | Anwendungen der Ellipsenreflexion . . . . .               | 330        |
| 11.4.2    | Ellipse, Hyperbel und ihr gemeinsamer Leitkreis . . . . . | 331        |
| 11.4.3    | Fadenkonstruktionen von Ellipse und Hyperbel . . . . .    | 333        |
| 11.5      | Kaustiken und Katakaustiken . . . . .                     | 334        |
| 11.6      | Geometrie im Rückblick . . . . .                          | 335        |
| <b>12</b> | <b>Selbstverständnis der Mathematik</b> . . . . .         | <b>337</b> |
| 12.1      | Mathematiker und Mathematikerinnen . . . . .              | 337        |
| 12.2      | Algebra und Zahlaufbau . . . . .                          | 339        |
| 12.2.1    | Natürliche und ganze Zahlen . . . . .                     | 339        |
| 12.2.2    | Rationale und reelle Zahlen . . . . .                     | 340        |
| 12.2.3    | Komplexe Zahlen . . . . .                                 | 341        |
| 12.3      | Mathematische Schönheit . . . . .                         | 343        |
| 12.4      | Beweisen . . . . .  | 345        |
| 12.4.1    | Ein Beweis in der Geometrie . . . . .                     | 345        |
| 12.4.2    | Ein Beweis in der Analysis . . . . .                      | 347        |
| 12.5      | Die unlösbaren Probleme der Antike . . . . .              | 350        |

|                             |            |
|-----------------------------|------------|
| 12.6 Fazit . . . . .        | 352        |
| <b>13 Lösungen</b>          | <b>353</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b> | <b>363</b> |
| <b>Sachverzeichnis</b>      | <b>375</b> |