

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Algebra	7
2.1	Summenformeln	7
2.1.1	Quadratsummen	7
2.1.2	Kubensummen	8
2.1.3	Nochmals Quadratsummen (oder Kubensummen?)	9
2.1.4	Erneut Quadratsummen - ein weiterer Versuch	11
2.1.5	Kubensummen (nochmals) mittels Quadratsummen	12
2.1.6	Biquadratsummen	14
2.1.7	Aufgaben	15
2.1.8	Ein Exkurs in die Analysis: Negative Exponenten	15
2.2	\mathbb{H} : Die Quaternionen	23
2.2.1	Genese von \mathbb{H}	23
2.2.2	Die Gleichung $X^2 = -1$ in \mathbb{H}	26
2.2.3	Drehungen im \mathbb{R}^3 mittels vektorieller Quaternionen	28
2.2.4	Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ via $\mathbb{H} [\mathfrak{S}(\mathbb{H})]$	30
2.2.5	Anwendung von \mathbb{H} in der Vektoralgebra	35
2.2.6	Parallelen zu bzw. Erweiterungen gegenüber \mathbb{C}	38
2.2.7	Ausblick	42
2.3	Schmankerln aus der Linearen Algebra: Matrizen und lineare Abbildungen	44
2.3.1	Spuren, Determinanten, Satz von CAYLEY-HAMILTON	44
2.3.2	Matrizeninversion	45
2.3.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	47
2.3.4	Doppelt-stochastische Matrizen	62
2.3.5	Geometrische Bedeutung der Determinante von Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$	64
2.4	Algebraische Gleichungen unter der Lupe	70
2.4.1	Quadratische Gleichungen	70
2.4.2	Diskriminanten	79
3	Geometrie	102
3.1	Mathematik und Fußball	102
3.2	Der Satz von MORLEY	104
3.3	Nachtrag zum skalaren Produkt und zur Determinante	106
3.4	Nachtrag zum vektoriellen Produkt	113
3.5	Regelflächen	114
3.6	Kreis	117
3.6.1	Kreisgleichungen	117
3.6.2	Kreistangenten	121
3.6.3	Polarentheorie beim Kreis	122
3.6.4	Schnitt zweier Kreise	127
3.6.5	Inversion am Kreis	131
3.6.6	Ergänzung zum Kreis	147
3.7	Die Ellipse als affines Kreisbild	149
3.7.1	Die Konstruktion von LA HIRE	149

3.7.2	Orthogonale Stauchungen und Streckungen (OS)	150
3.7.3	Ellipsentangenten und -polaren via OS	151
3.7.4	Die Ellipse in allgemeiner Lage	153
3.7.5	Ergänzung zur Ellipse	155
3.7.6	Eine kinematische Erzeugung der Hyperbel aus der Ellipse	158
3.8	Eine kurze Bemerkung zum Sinussatz ...	162
3.9	... sowie zum ersten Summensatz des (Co-)Sinus	163
3.10	Dreiecksgeometrie	164
3.10.1	Dreiecksschwerpunkt und Differenzgleichungen	164
3.10.2	FEUERBACH-Kreis und Bierdeckelsatz	172
3.10.3	Ein äußerst merkwürdiger Punkt	179
3.10.4	Zwei merkwürdige Punkte	181
3.11	Ergänzung zur HESSESchen Abstandsformel	183
4	Analysis	189
4.1	Die Sektorformel für Kurven in Parameterdarstellung	189
4.2	Die DESCARTESSche Kreismethode	193
4.2.1	Ableitung von Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten mittels DESCARTESScher Kreismethode	193
4.2.2	Äquivalenz der DESCARTESSchen Kreismethode und des klassischen Differentialquotienten	194
4.2.3	Eine Anwendung der DESCARTESSchen Kreismethode	195
4.3	Rektifikation von Kurvenbögen	196
4.4	Krümmung(skreise) ebener Kurven und Evoluten	199
4.5	KEPLERS Fassregel als Schmankerl zur numerischen Integration	213
4.6	Zur EULERSchen Formel	219
4.7	Zur Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion	224
4.8	(Wie die EULERSche Zahl in die) Hyperbelfunktionen (kommt)	225
4.9	Kurvenscharen und Enveloppen	235
4.9.1	Differentialgeometrische Grundlagen (Enveloppensatz)	235
4.9.2	Erste Anwendung: Die Astroide	236
4.9.3	Zweite Anwendung: Die Kardioide	246
4.9.4	Dritte Anwendung: Scharen von Graphen von Polynomfunktionen	252
4.9.5	Vierte Anwendung: Scharen von Graphen rationaler Funktionen (inkl. Ortskurven)	254
4.9.6	Anhang zum Enveloppensatz: Parameterdarstellung von Einhüllenden	261
4.9.7	Parallelkurven - Die Toroide	284
4.10	Das Katenoid - eine merkwürdige Volumensformel	289
4.11	Ungewöhnliche Volumensformeln	290