

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einige spannende Probleme – ein Schnupperkurs</b>	<b>1</b>
1.1	Zahlen mit genau vier Teilern – ein vollständiger Überblick	1
1.1.1	Zahlen mit genau vier Teilern	2
1.1.2	Struktur der Teilmengen	2
1.1.3	Erstes Zwischenergebnis	3
1.1.4	Sonderfall 8 und 27	3
1.1.5	Zweites Zwischenergebnis	3
1.2	Primzahlen – zwei überraschende Entdeckungen	5
1.2.1	Untersuchung gerader Zahlen	6
1.2.2	Goldbachsche Vermutung	6
1.2.3	Eine weitere überraschende Entdeckung	6
1.3	Pharmazentralnummer – Sicherheit in der Apotheke	8
1.3.1	Aufbau der Pharmazentralnummer (PZN)	9
1.3.2	Verwechslung einer Ziffer bei der PZN	10
1.3.3	Drehfehler bei der PZN	10
1.3.4	Der Strichcode bei der PZN	11
1.3.5	Sicherheit durch die PZN	12
1.4	Aufgaben	12
<b>2</b>	<b>Teiler, Vielfache, Reste</b>	<b>15</b>
2.1	Einführung	16
2.1.1	Rückgriff auf die Division	17
2.1.2	Rückgriff auf die Multiplikation	17
2.1.3	Ganze Zahlen	18
2.2	Teilbarkeits- und Vielfachenrelation als Ordnungsrelationen	19
2.2.1	Veranschaulichung durch Pfeildiagramme	19
2.2.2	Überbrückungspfeile/Transitivität	21
2.2.3	Ordnungsrelation	22
2.3	Summen- und Produktregeln	22
2.3.1	Summenregel	22
2.3.2	Differenzregel	24

2.3.3	Produktregeln	25
2.4	Division mit Rest	27
2.5	Die Restgleichheitsrelation	30
2.5.1	Seitenweise Addition von Kongruenzen	32
2.5.2	Seitenweise Multiplikation von Kongruenzen	33
2.5.3	Einsatzgebiete der Kongruenzrelation	35
2.6	Aufgaben	35
<b>3</b>	<b>Primzahlen</b>	<b>39</b>
3.1	Was sind Primzahlen?	39
3.1.1	Verschiedene Einführungswege	40
3.1.2	Unterschiedliche Gesichter der Primzahlen	44
3.1.3	Unzerlegbarkeit bei Addition und Multiplikation	45
3.2	Wie viele Primzahlen gibt es?	45
3.2.1	Anzahl der Primzahlen	46
3.2.2	Anzahl der Primzahlen – Beweisidee	47
3.2.3	Gewinnung einer neuen Primzahl – Beispiel	47
3.2.4	Gewinnung einer neuen Primzahl – allgemein	48
3.2.5	Weitere Verallgemeinerung	48
3.2.6	Jagd nach immer größeren Primzahlen	49
3.3	Sieb des Eratosthenes	50
3.3.1	Anordnung der natürlichen Zahlen	51
3.3.2	Drei zentrale Verständnisfragen	52
3.4	Verteilung der Primzahlen	55
3.4.1	Primzahlzwillinge	55
3.4.2	Primzahltrillinge/Primzahlvierlinge	56
3.4.3	Primzahllücken	56
3.5	Aufgaben	59
<b>4</b>	<b>Primzahlen – Bausteine der natürlichen Zahlen</b>	<b>61</b>
4.1	Multiplikative Zerlegungen natürlicher Zahlen	62
4.1.1	Zerlegungsbäume	62
4.1.2	Problematisierung der eindeutigen Primfaktorzerlegung	63
4.2	Multiplikativer Aufbau der natürlichen Zahlen und Primzahlen	64
4.2.1	Zwei zentrale Fragen	64
4.2.2	Primfaktorzerlegung – eine Verabredung	65
4.2.3	Existenz der Primfaktorzerlegung	65
4.2.4	Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung	67
4.3	Folgerungen	69
4.3.1	Primzahlkriterium	69
4.3.2	Lemma von Euklid	71
4.3.3	Elemente und Elementanzahl von Teilmengen	71

4.3.4	Weiterer Ausblick	74
4.4	Aufgaben	74
<b>5</b>	<b>Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches</b>	<b>77</b>
5.1	GgT und Teilmengen	78
5.2	GgT und Primfaktorzerlegung	81
5.2.1	Ein Beispiel	81
5.2.2	Allgemeine Vorgehensweise	82
5.3	GgT und Euklidischer Algorithmus	84
5.3.1	Ein Beispiel	84
5.3.2	Verallgemeinerung der zentralen Beweisidee	86
5.3.3	Euklidischer Algorithmus	87
5.4	KgV und Vielfachenmengen	89
5.5	KgV und Primfaktorzerlegung	92
5.6	Zusammenhang zwischen ggT und kgV	93
5.7	Linearkombinationen und lineare diophantische Gleichungen	95
5.8	Aufgaben	101
<b>6</b>	<b>Teilbarkeitsregeln</b>	<b>105</b>
6.1	Stellenwertsysteme – einige Bemerkungen	106
6.1.1	Dezimales Stellenwertsystem	106
6.1.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme	106
6.1.3	Notation einer Zahl in verschiedenen Basen	107
6.1.4	Basen und Anzahl der Ziffern	108
6.1.5	Mögliche Basen von Stellenwertsystemen	108
6.2	Ausgewählte Eigenschaften der Restgleichheitsrelation	108
6.3	Teilbarkeitsregeln I: Endstellenregeln	109
6.3.1	Dezimales Stellenwertsystem	109
6.3.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme	114
6.4	Teilbarkeitsregeln II: Quersummenregeln	116
6.4.1	Dezimales Stellenwertsystem	116
6.4.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme	118
6.5	Teilbarkeitsregeln III: Alternierende Quersummenregeln	120
6.5.1	Dezimales Stellenwertsystem	120
6.5.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme	125
6.6	Vorteile des Zugangsweges über die Restgleichheit	127
6.7	Aufgaben	128
<b>7</b>	<b>Dezimalbrüche</b>	<b>131</b>
7.1	Unterschiedliche Darstellungen von Bruchzahlen	132
7.1.1	Erste einfache Darstellungswechsel	133

7.1.2	Fachliche und didaktische Herausforderungen: Wann sind zwei Brüche gleich? . . . . .	136
7.1.3	Vorteile der unterschiedlichen Darstellungen . . . . .	137
7.2	Dezimalbruchentwicklungen als Erweiterung des Dezimalsystems . . . . .	137
7.2.1	Systematische Erweiterung des Dezimalsystems und des Divisionsalgorithmus . . . . .	138
7.2.2	Erste Erkundungen . . . . .	144
7.2.3	Erste Systematisierungen . . . . .	146
7.3	Endliche Dezimalbruchentwicklungen . . . . .	147
7.4	Periodische Dezimalbruchentwicklungen . . . . .	152
7.5	Ausblick: Andere Stellenwertsysteme – andere Systembruchentwicklungen . . . . .	154
7.6	Aufgaben . . . . .	156
<b>8</b>	<b>Restklassenmengen/algebraische Strukturen . . . . .</b>	<b>157</b>
8.1	Rechnen mit Resten . . . . .	158
8.1.1	Kontrolle von Ergebnissen . . . . .	158
8.1.2	Reste beim Aufteilen . . . . .	160
8.1.3	Darstellung von Resten an der Uhr . . . . .	161
8.2	Die Kongruenzrelation als Äquivalenzrelation . . . . .	164
8.2.1	Die Kongruenzrelation . . . . .	165
8.2.2	Rechnen mit Kongruenzen . . . . .	169
8.2.3	Probleme mit der Division bei Kongruenzen . . . . .	170
8.2.4	Eigenschaften der Kongruenzrelation modulo $m$ . . . . .	172
8.2.5	Erinnerung: Äquivalenzrelation . . . . .	174
8.3	Restklassen modulo $m$ als Äquivalenzklassen . . . . .	174
8.3.1	Von der Kongruenzrelation modulo $m$ zu Restklassen modulo $m$ . . . . .	175
8.3.2	Eigenschaften der Restklassenmengen modulo $m$ . . . . .	178
8.4	Verknüpfung von Restklassen/Rechnen mit Restklassen . . . . .	179
8.4.1	Addition und Multiplikation von Restklassen . . . . .	179
8.4.2	Wohldefiniertheit der Restklassenaddition und der Restklassenmultiplikation . . . . .	184
8.4.3	Rechengesetze für die Addition und Multiplikation von Restklassen . . . . .	186
8.4.4	Restklassengleichungen . . . . .	187
8.4.5	Subtraktion und Division von Restklassen . . . . .	191
8.5	Sprachebenen der Zahlentheorie . . . . .	192
8.6	Restklassenmengen als Beispiele für algebraische Strukturen . . . . .	195
8.6.1	Gleichungen als Ausgangspunkt . . . . .	196
8.6.2	Erste algebraische Begriffe und Strukturen . . . . .	198
8.6.3	Gruppen . . . . .	202
8.6.4	Ringe und Körper . . . . .	205

---

8.7	Aufgaben	209
<b>9</b>	<b>Praktische Anwendungen – Prüzziffernverfahren</b>	<b>213</b>
9.1	GTIN und EAN	213
9.1.1	Aufbau und Zielsetzung	213
9.1.2	Die Prüzziffer	216
9.1.3	Sicherheit des Prüzziffernsystems	217
9.1.4	Zusammenfassung	223
9.2	Die Internationale Standardbuchnummer ISBN-13	224
9.2.1	Einige Bemerkungen zur Einführung	224
9.2.2	Aufbau der ISBN-13	224
9.2.3	Sicherheit des ISBN-13-Prüzziffernsystems	225
9.2.4	Zusammenhang von ISBN-10 und ISBN-13	225
9.3	Die Internationale Standardbuchnummer ISBN-10	225
9.3.1	Berechnung der ISBN-10-Prüzziffer	226
9.3.2	Sicherheit des ISBN-10-Prüzziffernverfahrens	226
9.3.3	Zusammenfassung	231
9.4	Die Pharmazentralnummer PZN	232
9.4.1	Einige Bemerkungen zur Einführung	232
9.4.2	Berechnung der Prüzziffer	232
9.4.3	Sicherheit	233
9.4.4	Zusammenfassung	237
9.5	Aufgaben	238
	<b>Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben</b>	<b>241</b>
	<b>Liste der wichtigsten Symbole und Bezeichnungen</b>	<b>247</b>
	<b>Literatur</b>	<b>249</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>251</b>