

1	VEKTOREN UND EINFACHE GESETZMÄSSIGKEITEN	1
1.1	Skalare und Vektoren	1
1.2	Art von Vektoren	1
1.3	Summe und Differenz von Vektoren	3
1.4	Parallele Vektoren	3
1.5	Betrag eines Vektors	4
1.6	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	4
1.7	Einheitsvektor	5
1.8	Einheitsvektor im Koordinatensystem	5
1.9	Beispiele	7
2	Skalares Produkt von Vektoren	8
2.1	Definition des skalaren Produktes	8
2.2	Eigenschaften des skalaren Produktes	9
2.3	Geometrische Interpretation des skalaren Produktes	9
2.4	Zerlegung eines Vektors	10
2.5	Richtungswinkel, Richtungskosinus	10
2.6	Dreiecksungleichung	12
2.7	Lotvektoren und Vektorgleichungen	12
2.7.1	Lotvektoren	12
2.7.2	Vektorgleichungen	12
2.8	Beispiele zum skalaren Produkt von Vektoren	13
2.9	Arbeit	15
2.10	Übungsaufgaben	15
3	Lineare Transformation Kartesischer Koordinaten bzw. Kartesischer Komponenten eines Vektors	17
3.1	Translation des Koordinatensystems	17
3.2	Drehung des Koordinatensystems in der Ebene	17
3.3	Polarkoordinaten	18
3.4	Darstellung eines beliebigen Vektors in Polarkoordinaten in der Ebene	20
3.5	Drehung des Koordinatensystems im Raum	21
3.5.1	Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse	21
3.5.2	Drehung des Koordinatensystems um eine willkürliche Achse	22
3.5.3	Echter Vektor	23
3.6	Übungsaufgaben zum skalaren Produkt	25
4	Vektorprodukt oder Kreuzprodukt	28
4.1	Definition des Kreuzproduktes	28
4.2	Eigenschaften des Vektorproduktes	28
4.3	Skalarprodukt und Kreuzprodukt der Einheitsvektoren	29
4.4	Komponenten des Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	29

4.5	Spat-Produkt	29
4.6	Das Spat-Produkt in Koordinatenschreibweise	30
4.7	Vektorprodukt	31
4.8	Mehrfache Kreuzprodukte	32
4.9	Moment	34
4.10	Übungsaufgaben	34
5.	Geraden	36
5.1	Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	37
5.2	Spurpunkte von Geraden	37
5.3	Parallele und gleiche Geraden	37
5.4	Windschiefe bzw. sich schneidende Geraden	37
5.5	Koordinatengleichungen von Geraden	39
5.6	Abstand eines Punktes von einer Geraden	41
5.7	Abstand zweier paralleler Geraden	41
5.8	Abstand zweier windschiefer Geraden	42
5.9	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	43
5.10	Übungsaufgaben	43
6	EBENE	44
6.1	Parameterform (Punktrichtungsform) der Ebene	44
6.2	Dreipunktegleichung der Ebene	44
6.3	Die Spurgeraden der Ebene	44
6.4	Parallele und gleiche Ebenen	45
6.5	Punkt-Normale-Form der Geraden und der Ebene	45
6.6	Abstand eines Punktes von einer Ebene	47
6.7	Bestimmung vom Lot von einem Punkt r_1 auf eine Gerade	47
6.8	Abstand einer Geraden von einer Ebene	48
6.9	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	48
6.10	Abstand zweier paralleler Ebenen	49
6.11	Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen	50
7	Determinanten-Formen der Geraden- und Ebenengleichung	51
7.1	Die Geradengleichung in Form von Determinanten	51
7.2	Die Ebenengleichung in der Determinanten-Form	52
7.3	Kreis und Kugel	52
7.3.1	Gleichung von Kreis und Kugel	52
7.3.2	Tangente an den Kreis / die Kugel	53
7.3.3	Übungsaufgaben	54

II VEKTORANALYSIS

8	Kurven in x y- und x y z-Dimensionen	57
8.1	Vektorielle Darstellung von Kurven	57
8.2	Differentiation von Vektoren nach Skalaren (Parametern)	59
8.3	Differentiation einer Vektorsumme	60

8.3.1	Tangente und Normale als Einheitsvektoren	62
8.4	Differentiation eines Produktes aus Skalar und Vektor	62
8.4.1	Integration von Vektorfunktionen	63
8.4.2	Integration einer Summe aus Vektorfunktionen	63
8.4.3	Übungsaufgaben	64
8.5	Infinitesimale Winkeln	64
8.6	Bogenlänge einer Kurve	65
8.7	Differentiation eines Vektors $\mathbf{a}(t)$, der als Produkt aus Betrag und Einheitsvektor dargestellt ist	67
8.8	Differentiation und Integration einer Vektorfunktion	67
8.9	Die Geschwindigkeit eines Körpers im kartesischen Koordinatensystem (KKS)	67
8.10	Beschleunigung eines Körpers im KKS	68
8.11	Beschleunigung in koordinatenfreier Darstellung	68
8.11.1	Übersicht über Normalen- und Tangenteneinheitsvektoren	70
8.12	Differentiation bei Parameterdarstellung	71
8.13	Krümmung	71
8.14	Ableitung der Formel Gl(8.13-10)	72
9	Differentiation von Produkten von Vektoren	73
9.1	Differentiation skalaren Produktes von Vektoren	73
9.2	Differentiation des Vektorproduktes	73
9.3	Krümmung einer Kurve	74
9.3.1	Tangente und Tangentenvektor	74
9.3.2	Normalen-Vektor	74
9.3.3	Krümmung	75
9.3.4	Binormale	75
9.3.5	Torsion	76
9.3.5.1	Ebenen der Einheitsvektoren	78
9.3.6	Torsion τ als Funktion des Ortes	79
9.3.7	Magnetische Kraft auf eine bewegte elektrische Punktladung	83
9.3.8	Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	83
10	Weitere Beispiele aus der Physik	83
10.1	Rotationsgeschwindigkeit eines Teilchens	83
10.2	Bewegung einer elektrischen Ladung im homogenen Magnetfeld	84
10.3	Zweites Kepler'sches Gesetz	85
10.4	Ebene Bewegung eines Punktes P in Polarkoordinaten	86
10.5	Räumliche Bewegung, Zylinderkoordinaten	87
10.6	Räumliche Bewegung in natürlichen Koordinaten	88
10.7	Translation eines Bezugssystems	89
10.8	Rotation um eine feste Achse	91
10.9	Rotation eines Körpers um einen festen Punkt	91
10.10	Allgemeine ebene Bewegung	92
10.11	Allgemeine räumliche Bewegung	93
11	Relativbewegungen	95

11.1	Bewegungsgleichungen in einem Nicht-Newton'schen Bewegungssystem	95
11.2	Unabhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit von der Wahl des Drehpunktes A	96
11.3	Rotierendes Bezugssystem	97
11.4	Translation und gleichzeitige Rotation eines Bezugssystems S' relativ zu einem ruhenden System S	99
11.5	Linienintegrale (Kurvenintegrale)	101
11.6	Wegunabhängige Linienintegrale	105
11.7	Arbeit – Energie	105
11.8	Konservative Kraftfelder	106
11.9	Andere Ausdrucksweise des Linienintegrals	107
11.10	Linienintegral in Bezug auf Bogenlänge	107
11.11	Lösung von Doppelintegralen	107
11.12	Geometrische Anschauung	108
11.13	Dreifachintegrale	108
11.14	Auswertung von Dreifachintegralen	109
11.15	Flächen- und Volumenintegrale allgemein	109
11.16	Parametrisierung von Flächenfunktionen	111
12	Flächen im Raum	114
12.1	Vektorielle Darstellung einer Fläche	114
12.2	Kurve auf einer Fläche	116
12.3	Tangentialebene einer gekrümmten Fläche	117
12.4	Linielement	118
12.5	Flächennormale	119
12.6	Oberflächenelement, Oberflächenintegral	119
12.7	Flächen vom Typ $z = f(x, y)$	123
12.8	Rotationsflächen	124
12.9	Halbkugelfläche	126
12.10	Schraubenfläche	126
12.11	Ebene in Polarkoordinaten	127
12.12	Eine beliebige Fläche	127
13	Skalar- und Vektorfelder	129
13.1	Skalarfelder bzw. Skalarfunktionen	129
13.2	Vektorfeld bzw. Vektorfunktion	130
13.3	Der Gradient, Erläuterung	130
13.3.1	Maximum und Minimum einer Funktion mit zwei oder drei Veränderlichen	135
13.4	Die Richtungsableitung einer Ortsfunktion	140
13.5	Das totale Differential	142
13.6	Rechenregeln für Gradienten	142
13.6.1	Gradient einer Summe (in kartesischen Koordinaten)	142
13.6.2	Gradient eines Produktes (in kartesischen Koordinaten)	142
13.6.3	Gradient der Funktion einer Ortsfunktion	143
14	Das Gradientenfeld	143
14.1	Definition des Gradientenfeldes	143

14.2	Linienintegral eines Gradienten	143
14.3	Potentialfeld	147
14.3.1	Konservatives Vektorfeld	148
14.4	Berechnung von Linienintegralen	149
14.5	Tangentialfläche an einer beliebigen Fläche	149
14.5.1	Funktionen mit zwei Variablen	150
14.5.2	Funktionen mit drei Veränderlichen	151
14.5.3	Normalengerade g_n	153
14.5.4	Fläche der Form $z = f(x, y)$	154
14.6	Potential	156
14.7	Physikalische Anwendungen des Potentialbegriffs	156
14.8	Elektrostatisches Feld	157
14.9	Energie eines Dipols im elektrischen Feld	159
14.10	Potentielle Energie eines Moleküls mit elektrischem Dipolmoment	160
14.11	Ermittlung einer Funktion aus ihrem Gradienten	161
15	Die Divergenz	163
15.1	Vektorlinien	163
15.2	Vektorfluss	163
15.3	Divergenz eines Vektorfeldes	164
15.4	Divergenz in kartesischen Koordinaten	165
15.5	Divergenzbegriff – Gaußscher Integralsatz	167
16	Zirkulation und Zirkulationsdichte	170
16.1	Rotation und Stokes'scher Satz	170
16.2	Rotation analytisch	171
16.3	Rotation in kartesischen Koordinaten	173
16.4	Rotation einer Summe von Vektoren	175
16.5	Rotation eines Produktes CA	176
17	Der Nabla Operator ∇	177
17.1	Gradient	177
17.2	Divergenz	177
17.3	Rotation	177
17.4	Rechnen mit dem Nabla Operator	177
17.5	Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen der Vektoranalysis	181
18	Gauß, Stokes, Green	183
18.1	Der Gauß'sche Satz	183
18.2	Elektrostatisches Feld	186
18.3	Der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene	187
18.4	S t o k e s	193
18.5	Rotation von Umfangsgeschwindigkeit v eines rotierenden starren Körpers	196
18.6	Satz von Green	197
19	Ausgewählte Kapitel der Elektrizitätslehre	199

19.1	Spannung	199
19.2	Energie W	199
19.3	Elektrisches Feld	199
19.4	Das elektrische Potential	199
19.5	Stromdichte	199
19.6	Punktförmige Elektrode im unendlich ausgedehnten Medium	201
19.7	Unendlich lange linienförmige Elektrode	201
19.8	Das elektrostatische Feld	202
19.9	Verschiebungsfluss	202
19.10	Beziehung zwischen Verschiebungsdichte D und Feldstärke E	203
19.11	Beziehung zwischen Ladung und Spannung, Kondensator	203
19.12	Elektrostatische Felder	204
19.13	Verschiebungsstrom	204
19.14	Kraft auf Punktladung im elektrischen Feld	205
19.15	Magnetische Felder	205
19.16	Durchflutungsgesetz, 1. Maxwellsche Gleichung	206
19.17	Biot – Savartsches Gesetz	208
19.18	Magnetische Feldstärke und Induktion an Trennflächen	209
19.19	Magnetisches Potential	209
19.20	Induktion	209
19.21	Raumenergie des elektrostatischen Feldes	212
19.22	Raumenergie im magnetostatischen Feld	212
19.23	Energieumwandlung und Energieströmung im zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feld	212
19.24	Wellengleichung	214
20	Nichtkartesische Koordinaten	216
20.1	Zylinderkoordinaten	216
20.2	Transformationsgleichungen für Vektoren	217
20.3	Differenzieren in Zylinderkoordinaten	218
20.4	Gradient einer skalaren Funktion in Zylinderkoordinaten	219
20.5	Divergenz in Zylinderkoordinaten	221
20.6	Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten	222
20.7	Rotation in Zylinderkoordinaten	223
21	Kugelkoordinaten	224
21.1	Zusammenhang zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten	224
21.2	Transformationsgleichungen für Vektoren	226
21.3	Differenzieren in Kugelkoordinaten, Differentiation der Koordinaten-Einsvektoren	228
21.4	Gradient in Kugelkoordinaten	230
21.5	Divergenz in Kugelkoordinaten	230
21.6	Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten	231
21.7	Rotation in Kugelkoordinaten	232
21.8	Übungen	235
21.9	Lösungen der Übungsaufgaben	242