

## Inhaltsverzeichnis

**M Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik 9**

<b>1.1</b>	<b>Mathematik und ihre grundlegenden Arbeitsmethoden</b>	<b>10</b>
1.1.1	Grundlagen mathematischer Bildung . . . . .	11
1.1.2	Kommunizieren, Argumentieren und Begründen . . . . .	12
1.1.3	Mathematisieren und Modellieren . . . . .	17
1.1.4	Lösen von Problemen . . . . .	20
1.1.5	Internet und neue Medien . . . . .	22
<b>1.2</b>	<b>Grundbegriffe der Mathematik</b>	<b>24</b>
1.2.1	Mengen . . . . .	24
1.2.2	Logische Operationen mit Aussagen und Aussageformen . . . . .	30
1.2.3	Definitionen . . . . .	34
1.2.4	Schlussregeln . . . . .	36
1.2.5	Beweise . . . . .	39

**2 Zahlenfolgen 43**

<b>2.1</b>	<b>Der Begriff Zahlenfolge</b>	<b>44</b>
<b>2.2</b>	<b>Eigenschaften von Zahlenfolgen</b>	<b>46</b>
2.2.1	Monotonie und Beschränktheit . . . . .	46
2.2.2	Partialsummen . . . . .	48
<b>2.3</b>	<b>Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen</b>	<b>49</b>

**3 Funktionen und ihre Eigenschaften 53**

<b>3.1</b>	<b>Der Begriff Funktion</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Darstellung von Funktionen</b>	<b>58</b>
<b>3.3</b>	<b>Eigenschaften von Funktionen</b>	<b>60</b>
3.3.1	Monotonie und Beschränktheit . . . . .	60
3.3.2	Symmetrie . . . . .	61
3.3.3	Periodizität . . . . .	61
3.3.4	Umkehrbarkeit . . . . .	62
3.3.5	Nullstellen . . . . .	63
3.3.6	Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	63
<b>3.4</b>	<b>Verknüpfen und Verketteten von Funktionen</b>	<b>65</b>
<b>3.5</b>	<b>Funktionenscharen</b>	<b>67</b>
<b>3.6</b>	<b>Klassen reeller Funktionen</b>	<b>68</b>
3.6.1	Einteilung . . . . .	68
3.6.2	Lineare Funktionen . . . . .	70
3.6.3	Quadratische Funktionen . . . . .	71
3.6.4	Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen . . . . .	73
3.6.5	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	74
3.6.6	Trigonometrische Funktionen . . . . .	75
3.6.7	Exponentialfunktionen . . . . .	81
3.6.8	Logarithmusfunktionen . . . . .	82
3.6.9	Weitere spezielle reelle Funktionen . . . . .	84

Überblick 69

Überblick 86

	<b>4 Gleichungen und Gleichungssysteme</b>	<b>87</b>
	4.1 Lineare, quadratische, biquadratische Gleichungen	88
	4.2 Gleichungen höheren Grades	90
	4.3 Gleichungen mit absoluten Beträgen	93
	4.4 Wurzelgleichungen	94
	4.5 Goniometrische Gleichungen	95
	4.6 Exponential- und Logarithmengleichungen	97
	4.7 Lineare Gleichungssysteme	98
	4.7.1 Gaußsches Eliminationsverfahren	98
	4.7.2 Lösbarkeit und Lösungsmenge von Gleichungssystemen	101
	4.7.3 Determinanten; Regel von Cramer	104
	4.7.4 Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	107
	4.8 Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme	110
	<b>5 Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>115</b>
	5.1 Grenzwerte und Konvergenz von Zahlenfolgen; Grenzwertsätze	116
	5.2 Reihen	120
	5.3 Grenzwerte von Funktionen; Grenzwertsätze	123
	5.4 Stetigkeit von Funktionen	126
	<b>6 Differenzialrechnung</b>	<b>129</b>
	6.1 Grundbegriffe der Differenzialrechnung	130
	6.1.1 Ableitung einer Funktion	130
	6.1.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit	134
	6.1.3 Ableitungen höherer Ordnung	135
	6.2 Regeln zur Ableitung von Funktionen	137
	6.2.1 Konstanten-, Potenz- und Faktorregel	137
	6.2.2 Summen-, Produkt- und Quotientenregel	138
	6.2.3 Kettenregel	140
	6.2.4 Umkehrregel	141
	6.2.5 Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	142
	6.2.6 Partielle Ableitung von Funktionen mit zwei Variablen	143
	6.3 Ableitung elementarer Funktionen	144
	6.3.1 Ableitung von Potenzfunktionen	144
	6.3.2 Ableitung von trigonometrischen Funktionen	144
	6.3.3 Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
	6.4 Sätze über differenzierbare Funktionen	150
	6.5 Untersuchung von Funktionseigenschaften	154
	6.5.1 Monotonieverhalten	154
	6.5.2 Extrema	155
	6.5.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen	162
	6.5.4 Verhalten im Unendlichen	166
	6.5.5 Unstetigkeitsstellen	168
	6.5.6 Beispiele für Funktionsuntersuchungen	171
	6.6 Extremwertprobleme	177
	6.7 Bestimmen von Funktionsgleichungen	180
	6.7.1 Approximation durch Polynomfunktionen	180
	6.7.2 Die Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen	184

Überblick 136

Überblick 149

6.7.3	Der Satz von Taylor	186	
6.7.4	Das Verfahren der linearen Regression	189	Überblick 192
<b>6.8</b>	<b>Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen</b>	<b>193</b>	
6.8.1	Grafische Suche von Nullstellen	193	
6.8.2	Bisektionsverfahren	194	
6.8.3	Newtonsches Näherungsverfahren	195	
6.8.4	Allgemeines Iterationsverfahren	196	Überblick 198
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>199</b>	
<b>7.1</b>	<b>Das unbestimmte Integral</b>	<b>200</b>	
7.1.1	Die Begriffe <i>Stammfunktion</i> und <i>unbestimmtes Integral</i>	200	
7.1.2	Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen	202	
<b>7.2</b>	<b>Das bestimmte Integral</b>	<b>204</b>	
7.2.1	Flächeninhalt unter der Normalparabel	204	
7.2.2	Der Begriff <i>bestimmtes Integral</i>	205	
7.2.3	Begriffserweiterung und Eigenschaften bestimmter Integrale	209	
<b>7.3</b>	<b>Beziehung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral</b>	<b>211</b>	
7.3.1	Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	211	
7.3.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	212	
<b>7.4</b>	<b>Weitere Integrationsmethoden</b>	<b>213</b>	
7.4.1	Integration durch lineare Substitution	213	
7.4.2	Integration durch nichtlineare Substitution	213	
7.4.3	Partielle Integration	215	
7.4.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	215	
<b>7.5</b>	<b>Berechnen bestimmter Integrale; Anwendungen</b>	<b>217</b>	
7.5.1	Integrationsregeln	217	
7.5.2	Ermitteln von Flächeninhalten	217	
7.5.3	Physikalische Probleme	224	
7.5.4	Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven	228	Überblick 233
<b>7.6</b>	<b>Uneigentliche Integrale und nicht elementar integrierbare Funktionen</b>	<b>234</b>	
<b>7.7</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>236</b>	Überblick 238
<b>8</b>	<b>Differenzen- und Differenzialgleichungen</b>	<b>239</b>	
<b>8.1</b>	<b>Differenzengleichungen</b>	<b>240</b>	
8.1.1	Die Begriffe <i>Differenzengleichung</i> und <i>Lösung einer Differenzengleichung</i>	240	
8.1.2	Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	243	
<b>8.2</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>246</b>	
8.2.1	Arten von Differenzialgleichungen	246	
8.2.2	Lösungsverhalten von Differenzialgleichungen	247	
8.2.3	Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	250	
8.2.4	Näherungsverfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	253	Überblick 254

	<b>9 Komplexe Zahlen</b>	<b>255</b>
	9.1 Komplexe Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen	256
	9.2 Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	258
	9.3 Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	260
	9.4 Komplexe Zahlen in Exponentialform	262
	<b>10 Vektoren und Vektorräume</b>	<b>263</b>
	10.1 Zur Entwicklung der analytischen Geometrie	264
	10.2 Vektoren; Gleichheit, Addition und Vervielfachung	265
	10.3 Parallelität, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren	271
	10.4 Linearkombination von Vektoren; Basen in der Ebene und im Raum	272
	10.5 Koordinatensysteme	276
	10.6 Punkte, Strecken und Dreiecke in einem Koordinatensystem	282
	10.6.1 Mittelpunkt einer Strecke in der Ebene und im Raum	282
	10.6.2 Schwerpunkt eines Dreiecks	282
	10.6.3 Betrag eines Vektors; Länge einer Strecke	283
Überblick 285	10.6.4 Flächeninhalt eines Dreiecks	284
	10.7 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	286
	10.8 Skalarprodukt von Vektoren	288
	10.8.1 Definition und Eigenschaften	288
	10.8.2 Anwendungen des Skalarprodukts	291
	10.9 Vektorprodukt und Spatprodukt von Vektoren	293
	10.9.1 Vektorprodukt	293
Überblick 297	10.9.2 Spatprodukt	294
	10.10 Beweise unter Verwendung von Vektoren	298
	10.11 Vektorräume	299
	10.11.1 Der Begriff <i>Vektorraum</i>	299
	10.11.2 Unterräume und Erzeugendensysteme	300
	10.11.3 Basen und Dimension von Unterräumen	302
	<b>11 Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes</b>	<b>303</b>
	11.1 Geraden in der Ebene und im Raum	304
	11.1.1 Punktrichtungsgleichung einer Geraden	304
	11.1.2 Zweipunktegleichung einer Geraden	307
	11.1.3 Normalform der Gleichung einer Geraden in der Ebene	308
Überblick 315	11.1.4 Lagebeziehungen von Geraden	310
	11.1.5 Orthogonalität und Schnittwinkel von Geraden der Ebene	313
	11.2 Ebenen im Raum	316
	11.2.1 Gleichung einer Ebene in Vektorform	316
	11.2.2 Gleichung einer Ebene in Koordinatenschreibweise	317
	11.2.3 Hessesche Normalform der Ebenengleichung	320
	11.2.4 Spezielle Ebenen	321
	11.2.5 Lagebeziehungen von Gerade und Ebene	323
Überblick 329	11.2.6 Lagebeziehungen von zwei Ebenen	326
	11.3 Schnittwinkelberechnungen	330
	11.3.1 Schnittwinkel zweier Geraden im Raum	330
Überblick 333	11.3.2 Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	331
	11.3.3 Schnittwinkel zweier Ebenen	331

<b>11.4</b>	<b>Abstandsberechnungen</b>	<b>334</b>	
11.4.1	Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene und von einer Ebene im Raum . . . . .	334	
11.4.2	Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum . . . . .	336	
11.4.3	Abstand von Geraden im Raum . . . . .	337	
11.4.4	Abstand von Ebenen . . . . .	340	☞ Überblick 341
<b>11.5</b>	<b>Kreise und Kugeln</b>	<b>342</b>	
11.5.1	Gleichungen von Kreis und Kugel . . . . .	342	
11.5.2	Kreis und Gerade . . . . .	346	
11.5.3	Lagebeziehungen von Kreisen . . . . .	347	
11.5.4	Lagebeziehungen von Kugeln, Geraden und Ebenen. . . . .	348	☞ Überblick 352
<b>11.6</b>	<b>Kegelschnitte</b>	<b>353</b>	
11.6.1	Schnittfiguren eines Kegels. . . . .	353	
11.6.2	Ellipse . . . . .	354	
11.6.3	Hyperbel . . . . .	357	
11.6.4	Parabel . . . . .	359	
<b>12</b>	<b>Matrizen</b>	<b>361</b>	
<b>12.1</b>	<b>Der Begriff <i>Matrix</i></b>	<b>362</b>	
<b>12.2</b>	<b>Rechnen mit Matrizen</b>	<b>365</b>	
12.2.1	Addition und skalare Vervielfachung von Matrizen . . . . .	365	
12.2.2	Multiplikation von Matrizen . . . . .	366	
12.2.3	Bilden inverser Matrizen . . . . .	370	
<b>12.3</b>	<b>Rang einer Matrix; Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme</b>	<b>372</b>	
<b>12.4</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>374</b>	
<b>13</b>	<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>	<b>377</b>	
<b>13.1</b>	<b>Zufallsexperimente</b>	<b>378</b>	
13.1.1	Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente; Ergebnismengen . . . . .	378	
13.1.2	Zufällige Ereignisse; Verknüpfen von Ereignissen . . . . .	380	
13.1.3	Absolute und relative Häufigkeiten; empirisches Gesetz der großen Zahlen. . . . .	382	
13.1.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten. . . . .	383	
13.1.5	Vier- und Mehrfeldertafeln; Zerlegungen der Ergebnismenge . . . . .	386	
<b>13.2</b>	<b>Gleichverteilung (Laplace-Experimente)</b>	<b>388</b>	
13.2.1	Der Begriff <i>Gleichverteilung</i> . . . . .	388	
13.2.2	Rechenregel für die Gleichverteilung (Laplace-Regel) . . . . .	389	
13.2.3	Pfadregeln . . . . .	390	
13.2.4	Zählprinzip bei $k$ -Tupeln . . . . .	391	
13.2.5	Zählprinzip bei $n$ -elementigen Mengen. . . . .	394	
13.2.6	Urnenmodelle; Ziehen mit und ohne Zurücklegen; hypergeometrische Verteilung . . . . .	395	
13.2.7	Simulation mithilfe von Zufallszahlen . . . . .	398	

	<b>13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>401</b>
	13.3.1 Der Begriff <i>bedingte Wahrscheinlichkeit</i> . . . . .	401
	13.3.2 Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	402
	13.3.3 Unabhängigkeit von Ereignissen . . . . .	404
	<b>13.4 Zufallsgrößen</b>	<b>406</b>
	13.4.1 Endliche Zufallsgrößen . . . . .	406
	13.4.2 Erwartungswert . . . . .	408
	13.4.3 Streuung . . . . .	410
	<b>13.5 Binomialverteilung</b>	<b>414</b>
	13.5.1 Bernoulli-Experimente . . . . .	414
	13.5.2 Bernoulli-Ketten; binomialverteilte Zufallsgrößen . . . . .	415
Überblick 420	13.5.3 Grafische Veranschaulichung der Binomialverteilung . . . . .	417
	13.5.4 Tabellierungen zur Binomialverteilung . . . . .	421
	13.5.5 Erwartungswert und Streuung binomialverteilter Zufallsgrößen . . . . .	425
	13.5.6 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace zur Binomialverteilung . . . . .	427
	13.5.7 Normalverteilung . . . . .	430
Überblick 436	13.5.8 Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	435
	<b>14 Beschreibende und beurteilende Statistik</b>	<b>437</b>
	<b>14.1 Beschreibende Statistik</b>	<b>438</b>
	14.1.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beschreibenden Statistik . . . . .	438
Überblick 444	14.1.2 Kenngrößen statistischer Erhebungen . . . . .	438
	<b>14.2 Beurteilende Statistik</b>	<b>445</b>
	14.2.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beurteilenden Statistik . . . . .	445
	14.2.2 Grundprobleme des Testens von Hypothesen . . . . .	445
	14.2.3 Alternativtests . . . . .	449
Überblick 460	14.2.4 Signifikanztests . . . . .	456
	<b>15 Rechenhilfsmittel</b>	<b>461</b>
	<b>15.1 Geschichtlicher Abriss</b>	<b>462</b>
	<b>15.2 Elektronische Hilfsmittel</b>	<b>465</b>
	15.2.1 Grafikfähige Taschenrechner . . . . .	465
	15.2.2 Computeralgebrasysteme . . . . .	468
	15.2.3 Tabellenkalkulationen . . . . .	475
	15.2.4 Dynamische Geometriesoftware . . . . .	479
	<b>A Anhang</b>	<b>483</b>
	Register . . . . .	484