Felix R. Gantmacher

Matrizentheorie

Mit 11 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Inhalt

Erster Teil: Allgemeine Theorie

1. Matrizen und Matrizenoperationen

1.1.	Definition der Matrix. Bezeichnungen	19
1.2.	Addition und Multiplikation von Matrizen	21
1.3.	Quadratische Matrizen	31
1.4.	Assoziierte Matrizen. Minoren inverser Matrizen	38
1.5.	Inversion rechteckiger Matrizen. Die pseudoinverse Matrix	41

2. Der Gaußsche Algorithmus

2.1.	Die Gaußsche Eliminationsmethode	50
2.2.	Eine mechanische Interpretation des Gaußschen Algorithmus	55
2.3.	Der Sylvestersche Determinantensatz	57
2.4.	Zerlegung quadratischer Matrizen in Produkte von Dreiecksmatrizen	59
2.5.	Übermatrizen. Das Rechnen mit Übermatrizen. Der verallgemeinerte Gaußsche Algorithmus	66

3. Lineare Operatoren im n -dimensionalen Vektorraum

3.1.	Vektorräume	78
3.2.	Lineare Operatoren, die einen n -dimensionalen Vektorraum in einen m -dimensionalen Vektorraum abbilden	84
3.3.	Addition und Multiplikation linearer Operatoren.	86
3.4.	Koordinatentransformationen	87
3.5.	Äquivalente Matrizen. Der Rang eines Operators. Die Sylvestersche Ungleichung	89
3.6.	Lineare Operatoren, die einen n -dimensionalen Vektorraum in sich abbilden.	93
3.7.	Charakteristische Wurzeln und Eigenvektoren linearer Operatoren	97
3.8.	Lineare Operatoren einfacher Struktur	100

4. Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom einer Matrix

4.1.	Addition und Multiplikation von Matrizenpolynomen	103
4.2.	Rechte und linke Division von Matrizenpolynomen. Der verallgemeinerte Bezoutsche Satz	106
4.3.	Das charakteristische Polynom einer Matrix. Adjungierte Matrizen.	109
4.4.	Die Methode von D. K. FADDEEV zur gleichzeitigen Berechnung des charakteristischen Polynoms und der adjungierten Matrix	113
4.5.	Das Minimalpolynom einer Matrix	116

5. Matrizenfunktionen

5.1.	Definition der Matrizenfunktion	121
5.2.	Das Lagrange-Sylvestersche Interpolationspolynom	126
5.3.	Andere Wege zur Bestimmung von $f(A)$. Die Komponenten der Matrix A .	129
5.4.	Darstellung von Funktionen durch Matrizenreihen	134
5.5.	Einige Eigenschaften von Matrizenfunktionen	139
5.6.	Die Anwendung der Matrizenfunktionen zur Integration linearer Differential- gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	143
5.7.	Stabilität im Fall linearer Systeme	151

6. Äquivalente Transformationen von Polynommatrizen.**Analytische Elementarteilertheorie**

6.1.	Elementare Transformationen von Polynommatrizen	156
6.2.	Die kanonische Form einer λ -Matrix	160
6.3.	Invariantenteiler und Elementarteiler von Polynommatrizen	165
6.4.	Äquivalenz linearer Binome	171
6.5.	Kriterien für die Ähnlichkeit von Matrizen	173
6.6.	Normalformen von Matrizen	174
6.7.	Die Elementarteiler der Matrix $f(A)$	178
6.8.	Eine Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix	182
6.9.	Eine weitere Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix	185

7. Die Struktur linearer Operatoren im n -dimensionalen Vektorraum.**Geometrische Elementarteilertheorie**

7.1.	Das Minimalpolynom eines Vektors bzw. eines Vektorraumes (bezüglich eines gegebenen linearen Operators)	196
7.2.	Die Zerlegung eines Vektorraumes in invariante Unterräume mit teilerfremden Minimalpolynomen	198
7.3.	Kongruenzen. Quotientenräume	201
7.4.	Die Zerlegung eines Vektorraumes in zyklische invariante Unterräume . .	203
7.5.	Normalformen einer Matrix	208
7.6.	Invariantenteiler. Elementarteiler	211
7.7.	Die Jordansche Normalform einer Matrix	214
7.8.	Die Methode von A. N. KRYLOV zur Transformation der Säkulargleichung .	217

8.	Matrizengleichungen	
8.1.	Die Gleichung $AX = XB$	229
8.2.	Der Spezialfall $A = B$. Vertauschbare Matrizen	234
8.3.	Die Gleichung $AX - XB = C$	238
8.4.	Die skalare Gleichung $f(X) = 0$	239
8.5.	Gleichungen von Matrizenpolynomen.	240
8.6.	Die m -ten Wurzeln regulärer Matrizen	243
8.7.	Die m -ten Wurzeln singulärer Matrizen	246
8.8.	Der Logarithmus einer Matrix.	251
9. Lineare Operatoren im unitären Raum		
9.1.	Vorbemerkungen	254
9.2.	Metrische Räume	255
9.3.	Die Gramsche Determinante	258
9.4.	Orthogonalprojektionen	259
9.5.	Die geometrische Bedeutung der Gramschen Determinante	262
9.6.	Orthogonalisierung	267
9.7.	Orthonormalbasen	272
9.8.	Adjungierte Operatoren	274
9.9.	Normale Operatoren im unitären Raum	277
9.10.	Spektren normaler, hermitescher und unitärer Operatoren	279
9.11.	Positiv semidefinite und positiv definite hermitesche Operatoren.	283
9.12.	Polare Zerlegung linearer Operatoren im unitären Raum. Cayleysche Formeln.	284
9.13.	Lineare Operatoren im euklidischen Raum	289
9.14.	Die polare Zerlegung linearer Operatoren und die Cayleyschen Formeln im euklidischen Raum.	295
9.15.	Vertauschbare normale Operatoren	299
9.16.	Der pseudoinverse Operator.	301
10. Quadratische und hermitesche Formen		
10.1.	Lineare Transformationen quadratischer Formen	304
10.2.	Die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen	306
10.3.	Die Methode von LAGRANGE zur Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten. Die Jacobische Gleichung	308
10.4.	Semidefinite und definite quadratische Formen	314
10.5.	Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen	317
10.6.	Formenbündel	319
10.7.	Extremaleigenschaften der charakteristischen Wurzeln regulärer Formenbündel	325
10.8.	Kleine Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden	332
10.9.	Hermitesche Formen	337
10.10.	Hankelsche Formen	341

Zweiter Teil: Spezielle Fragen und Anwendungen**11. Komplexe symmetrische, schiefsymmetrische und orthogonale Matrizen**

11.1.	Einige Sätze über komplexe orthogonale und unitäre Matrizen	353
11.2.	Die polare Zerlegung einer komplexen Matrix	357
11.3.	Normalformen komplexer symmetrischer Matrizen	359
11.4.	Normalformen komplexer schiefsymmetrischer Matrizen	362
11.5.	Normalformen komplexer orthogonaler Matrizen.	368

12. Singuläre Matrizenbüschel

12.1.	Einführung	372
12.2.	Reguläre Matrizenbüschel	374
12.3.	Singuläre Büschel	376
12.4.	Die kanonische Form singulärer Matrizenbüschel	382
12.5.	Die minimalen Indizes eines Büschels. Ein Kriterium für die strenge Äquivalenz von Matrizenbüscheln	384
12.6.	Singuläre Büschel quadratischer Formen	387
12.7.	Anwendungen in der Theorie der Differentialgleichungen	391

13. Matrizen mit nichtnegativen Elementen

13.1.	Allgemeine Eigenschaften.	395
13.2.	Spektraleigenschaften unzerlegbarer nichtnegativer Matrizen	397
13.3.	Zerlegbare Matrizen	409
13.4.	Die Normalform einer zerlegbaren Matrix	417
13.5.	Primitive und imprimitive Matrizen	422
13.6.	Stochastische Matrizen	426
13.7.	Grenzwahrscheinlichkeiten homogener Markovscher Ketten mit endlich vielen Zuständen	431
13.8.	Vollständig nichtnegative Matrizen	441
13.9.	Oszillationsmatrizen	445

14. Verschiedene Regularitätskriterien und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln

14.1.	Das Regularitätskriterium von HADAMARD und seine Verallgemeinerungen	454
14.2.	Die Norm einer Matrix	458
14.3.	Die Verallgemeinerung des Hadamardschen Kriteriums auf Übermatrizen.	461
14.4.	Das Regularitätskriterium von FIEDLER	463
14.5.	Die Geršgorinschen Kreise und andere Lokalisierungsgebiete	464

15. Anwendungen der Matrizenrechnung zur Untersuchung linearer Differentialgleichungssysteme

15.1.	Systeme linearer Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten. Grundbegriffe	469
-------	---	-----

15.2.	Die Ljapunovsche Transformation	472
15.3.	Reduzierbare Systeme	474
15.4.	Die kanonische Form reduzierbarer Systeme. Der Satz von ERUGIN	477
15.5.	Der Matrizant.	480
15.6.	Das Produktintegral. Der Volterrasche Infinitesimal kalkül	486
15.7.	Differentialgleichungssysteme im Komplexen. Allgemeine Eigenschaften	489
15.8.	Das Produktintegral im Komplexen	492
15.9.	Isolierte singuläre Stellen	496
15.10.	Schwach singuläre Stellen	502
15.11.	Reduzierbare analytische Systeme	516
15.12.	Analytische Funktionen mehrerer Matrizen und ihre Anwendung zur Untersuchung von Differentialgleichungssystemen. Die Arbeiten von LAPPO-DANILEVSKIJ	519
16. Das Routh-Hurwitzsche Problem und verwandte Fragen		
16.1.	Einleitung	522
16.2.	Die Cauchyschen Indizes	524
16.3.	Der Routhsche Algorithmus	528
16.4.	Spezialfälle. Beispiele	532
16.5.	Der Satz von LJAPUNOV	536
16.6.	Der Routh-Hurwitzsche Satz	541
16.7.	Die Formel von ORLANDO	547
16.8.	Sonderfälle des Routh-Hurwitzschen Satzes	548
16.9.	Die Methode der quadratischen Formen. Die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen eines Polynoms	552
16.10.	Unendliche Hankelsche Matrizen endlichen Ranges	555
16.11.	Die Bestimmung des Index einer gebrochenen rationalen Funktion mit Hilfe der Koeffizienten in Zähler und Nenner	558
16.12.	Ein zweiter Beweis des Routh-Hurwitzschen Satzes	565
16.13.	Einige Ergänzungen zum Routh-Hurwitzschen Satz. Das Stabilitätskriterium von LIÉNARD und CHIPART	570
16.14.	Einige Eigenschaften Hurwitzscher Polynome. Ein Satz von STIELTJES. Die Darstellung Hurwitzscher Polynome mit Hilfe von Kettenbrüchen	575
16.15.	Das Stabilitätsgebiet. Die Markovschen Parameter	581
16.16.	Der Zusammenhang mit dem Momentenproblem.	585
16.17.	Der Zusammenhang der Hurwitzschen mit den Markovschen Determinanten	589
16.18.	Die Sätze von MARKOV und ČEBYŠEV	591
16.19.	Das verallgemeinerte Routh-Hurwitzsche Problem	598

Anhang von V. B. Lidskij

Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln

1.	Majorantenfolgen	605
2.	Die Horn-Neumannschen Ungleichungen	607

3.	Die Weylschen Ungleichungen	611
4.	Maximal-Minimaleigenschaften von Summen und Produkten der charakteristischen Wurzeln hermitescher Operatoren	614
5.	Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln von Operator- summen und -produkten	621
6.	Eine andere Aufgabenstellung bezüglich des Spektrums von Summen und Produkten hermitescher Operatoren	624
	Literatur	632
	Namen- und Sachverzeichnis	647