

INHALT

EINLEITUNG.....	17
1 Beweisen – ein zentrales Thema.....	17
1.1 Zielsetzung der Arbeit	20
1.2 Unterschiedliche Perspektiven.....	22
1.3 Unterricht als Angebot-Nutzungs-Struktur	25
1.4 Aufbau der Arbeit.....	27
THEORETISCHE GRUNDLAGEN	29
2 Beweis und Beweisen vom Fach her gesehen	29
2.1 Zum Begriff des Beweises	30
2.1.1 Begriffsklärung: Beweisen – Beweis	30
2.1.2 Unterschiedliche Akzentuierungen einzelner Aspekte.....	32
2.2 Zur Funktion des Beweises	39
2.3 Zur Bedeutung des Beweises.....	41
2.3.1 Kulturumspannende Bedeutung.....	41
2.3.2 Kommunikative Bedeutung	41
2.3.3 Unterschiedliche Bedeutung im Wandel der Zeit.....	43
2.3.4 Kontext Leistungsmessungsstudien und Bildungsstandards.....	43
2.4 Beweisprobleme und Problemlösetypen	47
2.4.1 Problemlösetypen	47
2.4.2 Beweis- und Bestimmungsaufgaben	49
2.5 Verschiedene Typen von Beweisen	50
2.5.1 Beweise aus mathematischer Sicht.....	50
2.5.2 Pragmatisches und intellektuelles Beweisen	50
2.5.3 Kategorisierung von Beweisen nach Wittmann und Müller (1988)	52
2.5.4 Verschiedene Beweisansätze von Leiss und Blum (2006)	55
2.5.5 Ausdifferenzierung des inhaltlich-anschaulichen Beweises: Synthese	56
2.5.6 Genetisches Beweisen.....	58
2.6 Beweis und Beweisen – Inhalt und Gegenstand der Unterrichtsforschung ...	59
2.7 Fazit: Beweis – Beweisen.....	61
3 Bedeutsame psychologische Prozesse beim Beweisen.....	62
3.1 Mathematisches Verstehen als Ziel und Ausgangslage	62
3.1.1 Verstehen: Begriffsklärung.....	63
3.1.2 Verstehen und Problemlösen.....	65
3.1.3 Verstehen von Beweisen	66
3.1.4 Die Warum-Frage als Auslöser des Beweisprozesses.....	67
3.1.5 Verstehenslemente – die inhaltlichen Bausteine	69
3.2 Modellieren – auch beim Beweisen.....	70
3.2.1 Der Modellierungsprozess in der Übersicht.....	71
3.2.2 Beweisen: spezifische Art des Modellierens	76
3.2.3 Verstehenslemente: Semantik und Syntaktik	76
3.3 Richtungen des Denkens und logisches Schliessen	78
3.3.1 Zwei Denkrichtungen: Induktion und Deduktion	78
3.3.2 Weitere Begründungsarten	79
3.3.3 Arten des schlussfolgernden Denkens	80

3.3.4	Entwicklung des schlussfolgernden Denkens	82
3.3.5	Verifikation – Falsifikation – Validierung.....	83
3.4	Formulieren – Denken und Sprechen	83
3.4.1	Denken und Sprechen	84
3.4.2	Formulieren: Verstandenes in eine Form bringen.....	87
3.4.3	Alltagsbegriff und wissenschaftlicher Begriff.....	89
3.4.4	Begriffsbildung als Arbeit an der Sprache.....	92
3.5	Argumentieren als schlussfolgernde Spracharbeit	99
3.5.1	Argumentieren: Begriffsklärung	99
3.5.2	Die Struktur eines Arguments	100
3.5.3	Argumentieren – ein psychosozialer Prozess	103
3.5.4	Argumentieren aus Sicht der Bildungsstandards.....	105
3.5.5	Beweisen und Argumentieren: Gleiches oder Unterschiedliches?	106
3.6	Fazit: Prozessmodell des mathematischen Beweisen.....	108
4	Unterricht und unterrichtliches Handeln beim Beweisen.....	116
4.1	Die Lehrpersonen und ihr Handeln beim Beweisen	116
4.1.1	Überzeugungen von Lehrpersonen	116
4.1.2	Wissensbereiche von Lehrpersonen	121
4.1.3	Emotionale und motivationale Aspekte.....	126
4.1.4	Gestaltung der Lerngelegenheiten im Unterricht	128
4.2	Die Lernenden beim Beweisen.....	131
4.2.1	Beweiskompetenz	131
4.2.2	Motivationale Aspekte und Interesse beim Beweisen	137
4.2.3	Emotionale Aspekte beim Beweisen	139
4.2.4	Schwierigkeiten der Lernenden mit und beim Beweisen.....	139
4.2.5	Mathematikunterricht aus Sicht der Lernenden.....	142
4.3	Lernhilfe- und Unterstützungskultur beim Beweisen.....	143
4.3.1	Grundsätzliche Überlegungen zur Gestaltung von Beweisphasen	145
4.3.2	Bedingungen für produktives Argumentieren.....	149
4.3.3	Modelle für die Gestaltung von mathematischen Beweisphasen	150
4.3.4	Unterstützung mittels Heuristik	157
4.3.5	Partizipation der Lernenden an der Tätigkeit des Beweisen.....	162
4.3.6	Didaktische Kommunikation und Klassengespräch	167
4.4	Fazit: Unterricht und unterrichtliches Handeln	174
ERKENNTNISINTERESSE, ZIELSETZUNGEN, KONTEXT UND FRAGESTELLUNGEN..		176
5	Erkenntnisinteresse im Kontext einer binationalen Studie	176
5.1	Zentrale Aspekte und Forschungslücken.....	176
5.2	Erkenntnisinteresse	179
5.3	Kontext dieser Arbeit.....	180
6	Fragestellungen	182
6.1	Beschreibung von Beweisssequenzen	182
6.1.1	Entwicklung des Analyseinstruments	183
6.1.2	Deskription der Beweisssequenzen	183
6.2	Gestaltung von Beweisssequenzen und weitere Daten auf Klassenebene.....	184
6.2.1	Beweisssequenzen und Überzeugungen der Lehrpersonen.....	184
6.2.2	Beweisssequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität.....	185
6.2.3	Beweisssequenzen – unabhängig vom Inhalt?	186

6.2.4	Beweissequenzen und mittlere Leistungsfähigkeit der Klasse	187
6.3	Wirksamkeit und bestimmte Konfigurationen von Beweissequenzen	187
6.4	Adaptivität unterschiedlicher Konfigurationen von Beweissequenzen	188
6.5	Argumentations- und Partizipationsstrukturen in Extremklassen	189
6.6	Empirische Arbeit im Überblick	189
AUFGABE UND AUFGABENANALYSE.....		192
7	Aufgabenanalyse	192
7.1	Aufgabe und Aufgabentyp	193
7.2	Aufgabenmerkmale	194
7.2.1	Aufgabenkern.....	194
7.2.2	Mathematisches Stoffgebiet	196
7.2.3	Aufgabenperipherie.....	196
7.2.4	Strukturbildende Aspekte der Aufgabe	197
7.3	Didaktische Qualität der Aufgabe	202
7.4	Konsequenzen für die Bearbeitung der „Speziellen Aufgabe“	205
7.5	Verstehenselemente und mathematischer Hintergrund.....	208
7.5.1	Mathematischer Hintergrund der „Speziellen Aufgabe“	208
7.5.2	Zentrale Verstehenselemente der „Speziellen Aufgabe“	208
7.5.3	Verstehenselemente umgesetzt in den verschiedenen Beweistypen	211
QUANTITATIVER TEIL: METHODEN UND ERGEBNISSE.....		222
8	Methode Teilstudie I: Videoanalyse.....	222
8.1	Datensatz	222
8.1.1	Videodaten.....	222
8.1.2	Stichprobe.....	223
8.1.3	Analyseeinheit	225
8.2	Analyseinstrument	225
8.2.1	Dimensionen des Analyseinstruments.....	226
8.2.2	Analyseinstrument in der Übersicht	232
8.2.3	Kategorien im Einzelnen.....	235
8.2.4	Einschätzung der Items	252
8.2.5	Reliabilität des Instrumentes	260
8.3	Vorgehensweise	263
8.3.1	Videoanalyse.....	263
8.4	Datenauswertung.....	266
8.4.1	Nominal und ordinal skalierte Daten	266
8.4.2	Berechnete Variablen und metrisch skalierte Daten	267
8.4.3	Mittelwertvergleiche	267
9	Methode Teilstudie II: quantitative Datenanalyse	268
9.1	Datensatz und Stichprobe	268
9.2	Daten auf Klassenebene	268
9.2.1	Befragungsdaten Lehrpersonen.....	269
9.2.2	Daten aus dem hochinferenten Rating der Textaufgabeneinheit	272
9.2.3	Daten aus der Pythagoraseinheit: Beweiselemente.....	273
9.2.4	Leistungsdaten der Lernenden auf Klassenebene.....	275
9.2.5	Daten zur Veränderung von Leistung, Motivation und Interesse.....	277
9.2.6	Befragungsdaten der Lernenden, Eingangsbefragung	277

9.2.7	Befragungsdaten der Lernenden, unmittelbar nach der Videosequenz.....	279
9.2.8	Befragungsdaten der Lernenden, Ausgangsbefragung.....	280
9.3	Datenerhebung und -auswertung.....	280
10	Ergebnisse Teilstudie I: quantitative Auswertung aller Fälle.....	281
10.1	Deskription der Beweisequenzen.....	282
10.1.1	Bearbeitungsrahmen und Kontext der Aufgabenbearbeitung.....	282
10.1.2	Sprache, Begrifflichkeiten und Metakommentare.....	283
10.1.3	Bearbeitungshilfen und Arten des Schliessens.....	283
10.1.4	Art des Beweises.....	284
10.1.5	Heuristik.....	285
10.1.6	Verstehenselemente.....	286
10.1.7	Bearbeitung von Aufgabenmerkmalen.....	291
10.1.8	Effizienz der Bearbeitung.....	292
10.1.9	Fachliche Fehler.....	294
10.1.10	Kommunikationsmuster.....	295
10.1.11	Eine besondere Gruppe: mehrdimensionales Beweisen.....	303
10.2	Systematische Zusammenhänge und Abhängigkeiten.....	307
10.2.1	Korrelationen.....	307
10.2.2	Zusammenhänge mit der Art des durchgeführten Beweises.....	311
10.2.3	Gruppenunterschiede.....	315
10.3	Zusammenfassung und Beantwortung der Fragestellungen.....	317
10.3.1	Zusammenfassung und Beantwortung der Fragestellungen.....	317
11	Ergebnisse Teilstudie II: weitere Daten.....	322
11.1	Gestaltung von Beweisequenzen und Merkmale der Lehrpersonen.....	324
11.1.1	Gruppenvergleiche.....	325
11.1.2	Korrelationen.....	327
11.1.3	Zusammenfassung Gruppenvergleiche nach Beweistyp.....	329
11.1.4	Zusammenfassung Korrelationen.....	333
11.2	Gestaltung von Beweisequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität.....	337
11.2.1	Gruppenvergleiche.....	337
11.2.2	Korrelationen.....	338
11.2.3	Zusammenfassung Qualitätsmerkmale nach Beweistyp.....	339
11.2.4	Zusammenfassung Korrelationen.....	341
11.3	Gestaltung von Beweisequenzen – unabhängig vom Inhalt?.....	343
11.3.1	Gruppenvergleiche.....	343
11.3.2	Korrelationen.....	344
11.3.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche.....	344
11.3.4	Zusammenfassung der Korrelationen.....	347
11.4	Gestaltung von Beweisequenzen und Leistungsfähigkeit der Klassen.....	349
11.4.1	Gruppenvergleiche.....	350
11.4.2	Korrelationen.....	351
11.4.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche.....	352
11.4.4	Zusammenfassung der Korrelationen.....	354
11.5	Wirksamkeit: Veränderungen über das Jahr.....	356
11.5.1	Gruppenvergleiche.....	356
11.5.2	Korrelationen.....	358
11.5.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche.....	359

11.5.4	Zusammenfassung der Korrelationen	363
11.6	Gestaltung von Beweisssequenzen und die Sichtweise der Lernenden.....	366
11.6.1	Gruppenvergleiche	367
11.6.2	Korrelationen	368
11.6.3	Zusammenfassung der Gruppenvergleiche	370
11.6.4	Zusammenfassung der Korrelationen	373
QUALITATIVER TEIL: METHODEN UND ERGEBNISSE.....		379
12	Methode der qualitativen Fallanalyse.....	379
12.1	Fragestellungen, Leitfragen und Falldefinition.....	379
12.1.1	Fragestellungen und Leitfragen	379
12.1.2	Art der Fallstudie und Definition des Falles.....	380
12.2	Datensatz und Stichprobe	380
12.2.1	Vorannahmen.....	381
12.2.2	Kriterien für die Fallauswahl.....	381
12.2.3	Ausgewählte Fälle	383
12.3	Einbezogene Daten	383
12.3.1	Daten aus Teilstudie I und Teilstudie II	384
12.3.2	Weitere Daten	384
12.4	Datenauswertung.....	386
12.4.1	Gewählter Zugang.....	386
12.4.2	Fünf Bearbeitungsschritte bei der Datenauswertung	387
12.5	Ergebnisdarstellung.....	392
13	Ergebnisse Teilstudie III: Extremklassen.....	392
13.1	Die beiden ausgewählten Fälle in Teilstudie I und II.....	393
13.1.1	Die beiden Fälle in der Videoanalyse.....	393
13.1.2	Befragungsdaten Lehrpersonen.....	396
13.1.3	Daten der Schülerinnen und Schüler auf Klassenebene	401
13.1.4	Fazit	406
13.2	Fall A: Grösster mittlerer Leistungszuwachs	407
13.2.1	Wie entwickelt sich das Thema?.....	407
13.2.2	Wie wird begründet und erklärt?	418
13.2.3	Wie wird interagiert?	421
13.2.4	Wie erklärt die Lehrperson ihr Handeln?.....	424
13.3	Fall B: Geringster mittlerer Leistungszuwachs während des Jahres.....	427
13.3.1	Wie entwickelt sich das Thema?.....	427
13.3.2	Wie wird begründet und erklärt?	449
13.3.3	Wie wird interagiert?	455
13.3.4	Wie erklärt die Lehrperson ihr Handeln?.....	458
13.4	Vergleich der Argumentations- und Partizipationsstrukturen	461
13.4.1	Vergleich der beiden Fälle in den fünf Aspekten.....	461
13.4.2	Fazit	472
ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION.....		474
14	Diskussion der Ergebnisse	474
14.1	Zentrale Ergebnisse der Analyse aller Fälle aus Teilstudie I	474
14.1.1	Beschreibung der Beweiskultur	474
14.1.2	Systematische Abhängigkeiten und Zusammenhänge der Merkmale.....	483

14.2	Diskussion der Befunde aus Teilstudie II in Form von Thesen	488
14.2.1	Beweissequenzen und Überzeugungen der Lehrpersonen	489
14.2.2	Beweissequenzen und eingeschätzte Unterrichtsqualität	492
14.2.3	Beweissequenzen – unabhängig vom Inhalt?	493
14.2.4	Beweissequenzen und Leistungsfähigkeit der Klasse/Adaptivität	494
14.2.5	Wirksamkeit und bestimmte Konfigurationen von Beweissequenzen	496
14.2.6	Sichtweise der Lernenden	498
14.2.7	Weitere Aspekte	500
14.3	Diskussion zentraler Ergebnisse der Fallstudie (Teilstudie III)	501
14.3.1	Einschätzung von Unterrichtsqualität und Bildungswirkungen	501
14.3.2	Zusammenfassung in Form von Thesen	506
	RÜCKBLICK UND AUSBLICK	515
15	Rückblick und Ausblick	515
15.1	Schlussfolgerungen zum Beweisen, Begründen und Argumentieren	515
15.1.1	Konsequenzen für die Tätigkeit des Beweizens im Unterricht	515
15.1.2	Konsequenzen für den Mathematikunterricht	516
15.1.3	Konsequenzen für die Praxis	517
15.1.4	Konsequenzen für die Forschung	519
15.2	Rückblick und Ausblick	520
15.2.1	Beitrag Theorieentwicklung	520
15.2.2	Diskussion des methodischen Vorgehens	521
15.2.3	Grenzen der vorliegenden Studien	525
15.2.4	Ausblick	526
	LITERATUR	528
	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	550
	TABELLENVERZEICHNIS	555