
Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle

von Dr. rer. nat. Regina Storm

12. Auflage

mit 82 Bildern, 20 Tafeln und 120 Beispielen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	13
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG		
1	Einführung	15
2	Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit	16
2.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse.....	16
2.2	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen.....	19
2.3	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.....	21
2.4	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit.....	24
2.5	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit.....	27
2.6	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten.....	29
3	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit	31
3.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeit.....	31
3.2	Unabhängigkeit von Ereignissen.....	33
3.3	Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.....	34
3.4	Bayessche Formel.....	36
4	Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen	37
4.1	Einführung der Zufallsgröße und ihrer Verteilungsfunktion.....	37
4.2	Verteilungen diskreter Zufallsgrößen.....	41
4.3	Verteilungen stetiger Zufallsgrößen.....	42
4.4	Erwartungswert und Streuung.....	43
4.5	Quantile.....	46
5	Spezielle Verteilungen	47
5.1	Diskrete Verteilungen.....	47
5.1.1	Die diskrete gleichmäßige Verteilung.....	47
5.1.2	Die Binomialverteilung.....	47
5.1.3	Die hypergeometrische Verteilung.....	53
5.1.4	Die Poisson-Verteilung.....	56
5.1.5	Die geometrische Verteilung.....	58
5.1.6	Die negative Binomialverteilung.....	60
5.2	Stetige Verteilungen.....	61
5.2.1	Die stetige gleichmäßige Verteilung.....	61
5.2.2	Die Normalverteilung.....	62
5.2.3	Die logarithmische Normalverteilung.....	70
5.2.4	Die Exponentialverteilung.....	72
5.2.5	Die Weibull-Verteilung.....	74
5.2.6	Die Gammaverteilung.....	75
6	Zufällige Vektoren und ihre Verteilungsfunktionen	77
6.1	Einführung des zufälligen Vektors.....	77
6.2	Verteilungen diskreter zufälliger Vektoren.....	79
6.3	Verteilungen stetiger zufälliger Vektoren.....	82

7	Stochastische Prozesse	85
7.1	Einführung des stochastischen Prozesses.....	85
7.2	Momente des stochastischen Prozesses.....	88
7.3	Stationäre Prozesse.....	89
7.3.1	Definition des stationären Prozesses.....	89
7.3.2	Einige wichtige stationäre Prozesse.....	90
7.4	Der Poisson-Prozeß.....	96

MATHEMATISCHE STATISTIK

8	Einführung	99
9	Beschreibende Statistik für eindimensionale Merkmale	100
9.1	Urliste, Häufigkeitstabelle, empirische Verteilung.....	100
9.2	Grafische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen.....	107
9.3	Statistische Maßzahlen.....	109
9.3.1	Mittelwerte.....	109
9.3.2	Streuungsmaße.....	114
9.3.3	Empirisches Quantil.....	118
10	Beschreibende Statistik für zweidimensionale Merkmale	119
10.1	Urliste, Korrelationstabelle, empirische Verteilung.....	119
10.2	Statistische Maßzahlen.....	125
10.3	Berechnung der empirischen Regressionsgeraden.....	129
11	Grundgesamtheit, Stichprobe, Stichprobenfunktion	134
11.1	Grundgesamtheit und Stichprobe.....	134
11.2	Stichprobenfunktionen.....	139
11.3	Einige wichtige Verteilungen von Stichprobenfunktionen.....	140
12	Statistische Schätzmethoden	145
12.1	Allgemeine Aufgabenstellung.....	145
12.2	Punktschätzungen.....	145
12.2.1	Schätzung, Schätzwert.....	145
12.2.2	Kriterien zur Auswahl einer Punktschätzung.....	147
12.2.3	Beispiele für Punktschätzungen.....	148
12.2.3.1	Punktschätzung für die Wahrscheinlichkeit p	148
12.2.3.2	Punktschätzung für die Verteilungsfunktion $F(x)$	148
12.2.3.3	Punktschätzungen für den Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	149
12.2.3.4	Punktschätzungen für die Streuung σ^2 der normalverteilten Grundgesamtheit.....	149
12.2.3.5	Punktschätzungen für den Parameter λ der poissonverteilten Grundgesamtheit.....	151
12.2.4	Maximum-Likelihood-Schätzmethode.....	151
12.2.5	Methode der kleinsten Quadrate.....	155
12.3	Konfidenzschätzungen.....	156
12.3.1	Konfidenzintervalle.....	156

12.3.2	Konfidenzintervall für den Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekanntem σ^2	158
12.3.3	Konfidenzintervall für den Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekanntem σ^2	161
12.3.4	Konfidenzintervall für die Streuung σ^2 der normalverteilten Grundgesamtheit.....	163
12.3.5	Konfidenzintervall für den Variationskoeffizienten v der normalverteilten Grundgesamtheit.....	166
12.3.6	Konfidenzintervall für den Median einer stetigen Verteilung.....	166
12.3.7	Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p der alternativen Grundgesamtheit.....	167
12.4	Toleranzschätzungen.....	170
12.4.1	Statistische Toleranzgrenzen.....	170
12.4.2	Statistische Toleranzgrenzen für normalverteilte Grundgesamtheit.....	171
12.4.3	Verteilungsfreie statistische Toleranzgrenzen.....	172
13	Statistische Tests	173
13.1	Allgemeine Aufgabenstellung.....	173
13.2	Test für den Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Streuung σ^2	174
13.2.1	Der statistische Test.....	174
13.2.2	Die Gütefunktion des Tests.....	182
13.2.3	Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs.....	184
13.3	Test für den Mittelwert μ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekannter Streuung σ^2	185
13.4	Vergleich zweier Mittelwerte aus normalverteilten Grundgesamtheiten....	188
13.4.1	Die beiden Stichproben sind verbunden.....	188
13.4.2	Die beiden Stichproben sind voneinander unabhängig.....	190
13.5	Test für die Streuung σ^2 der normalverteilten Grundgesamtheit.....	193
13.6	Vergleich zweier Streuungen aus normalverteilten Grundgesamtheiten....	195
13.7	Prüfung der Verteilung der Grundgesamtheit.....	198
13.7.1	Einige Bemerkungen über die Voraussetzung der Normalverteilung.....	198
13.7.2	Grafische Verfahren zur Prüfung der Verteilung.....	199
13.7.2.1	Das Wahrscheinlichkeitsnetz.....	199
13.7.2.2	Das Weibull-Netz.....	203
13.7.3	Prüfung der Verteilung mit dem χ^2 -Test.....	205
13.7.4	Prüfung der Verteilung mit dem Kolmogoroff-Test.....	211
13.8	Test für die Wahrscheinlichkeit p der alternativen Grundgesamtheit.....	215
13.9	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten aus alternativen Grundgesamtheiten.....	217
14	Varianzanalyse	219
14.1	Aufgabenstellung.....	219
14.2	Einfache Klassifikation für Modell I.....	221
14.2.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	221
14.2.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	224
14.2.3	\mathcal{F} - Test zur Prüfung der Hypothese $H_0 (H_A)$	225
14.2.4	Tafel der Varianzanalyse.....	226
14.2.5	Bartlett-Test.....	228

14.2.6	Multiple Mittelwertvergleiche.....	230
14.3	Zweifache Klassifikation für Modell I (einfache Besetzung).....	234
14.3.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	234
14.3.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	236
14.3.3	\mathcal{F} - Test zur Prüfung der Hypothesen H_A und H_B	238
14.3.4	Tafel der Varianzanalyse.....	238
14.4	Zweifache Klassifikation für Modell I (mehrfache Besetzung).....	240
14.4.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	240
14.4.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	243
14.4.3	\mathcal{F} - Test zur Prüfung der Hypothesen H_A , H_B und H_{AB}	244
14.4.4	Tafel der Varianzanalyse.....	244
15	Regressions- und Korrelationsanalyse.....	246
15.1	Aufgabenstellung.....	246
15.2	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen.....	247
15.2.1	Das Modell der einfachen linearen Regression.....	247
15.2.2	Test und Konfidenzintervall für den Regressionskoeffizienten.....	249
15.2.3	Test und Konfidenzintervall für die Regressionskonstante.....	250
15.2.4	Konfidenzintervalle für die Regressionsgerade.....	251
15.2.5	Vorhersageintervall für die Zielgröße.....	252
15.2.6	Vergleich zweier Regressionsgeraden.....	253
15.3	Mehrfache (multiple) lineare Regression.....	257
15.3.1	Das Modell der mehrfachen linearen Regression.....	257
15.3.2	Berechnung der empirischen Regressionsebene.....	258
15.3.3	Tests und Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten.....	262
15.4	Nichtlineare Regression.....	263
15.5	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen.....	265
15.5.1	Voraussetzungen bei der linearen Korrelation.....	265
15.5.2	Test auf Unabhängigkeit der Merkmale.....	265
15.5.3	Prüfung des Grades des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen.....	266
15.5.4	Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten.....	268
15.5.5	Vergleich zweier Korrelationskoeffizienten.....	268
15.6	Partielle und mehrfache (multiple) lineare Korrelation.....	269
15.6.1	Partielle lineare Korrelation.....	270
15.6.2	Mehrfache (multiple) lineare Korrelation.....	274
16	Prüfverfahren bei zwei qualitativen Merkmalen (Kontingenztafeln).....	276
16.1	Test auf Unabhängigkeit der Merkmale.....	276
16.2	Kontingenzmaße für die Stärke des Zusammenhangs.....	279
17	Einige nichtparametrische Tests.....	281
17.1	Einführung.....	281
17.2	Vorzeichentest.....	282
17.2.1	Vorzeichentest zum Vergleich verbundener Stichproben.....	282
17.2.2	Vorzeichentest zur Prüfung des Medians einer Verteilung.....	285
17.3	Wilcoxon-(Mann-Whitney-U-) Test.....	286
17.4	X-Test von van der Waerden.....	291

18	Das Ausreißerproblem	295
18.1	Ausreißertests.....	295
18.2	Zweiseitiger Ausreißertest für normalverteilte Grundgesamtheit.....	296
18.3	Ausreißertests nach Dixon.....	297
19	Die Zeitreihenanalyse	298
19.1	Einführung.....	298
19.2	Beispiele für Zeitreihen.....	300
19.3	Zerlegung einer Zeitreihe in Komponenten.....	303
19.4	Methoden zur Schätzung und Elimination des Trends.....	304
19.4.1	Schätzung des Trends mit Regression.....	304
19.4.2	Glätten von Zeitreihen.....	306
19.4.3	Die Differenzenmethode.....	309
19.5	Methoden zur Elimination und Schätzung der Saisonkomponente.....	311
19.6	Modellierung einer Zeitreihe durch einen stochastischen Prozeß.....	315
19.7	Statistische Analyse stationärer Prozesse.....	317
19.7.1	Schätzung von Mittelwert- und Autokorrelationsfunktion.....	317
19.7.2	Anpassung eines ARIMA-Prozesses.....	319
19.8	Prognose.....	322

STATISTISCHE QUALITÄTSKONTROLLE

20	Aufgaben und Methoden	325
21	Statistische Prozeßkontrolle	326
21.1	Einführung.....	326
21.2	Kontrollkarten für die messende Prüfung.....	327
21.2.1	Mittelwertkarte (\bar{x} -Karte).....	327
21.2.1.1	Aufbau der Mittelwertkarte.....	327
21.2.1.2	Berechnung der Kontrollgrenzen.....	331
21.2.1.2.1	Wahl von α und n	331
21.2.1.2.2	Sollwert a und Streuung σ^2 sind bekannt.....	333
21.2.1.2.3	Schätzwerte für a und σ aus dem Vorlauf.....	333
21.2.1.3	Führung der Kontrollkarte.....	340
21.2.1.4	Die mittlere Lauflänge.....	341
21.2.2	Mediankarte (\tilde{x} -Karte).....	344
21.2.3	\bar{x}/s -Karte.....	345
21.2.4	Die Prozeßfähigkeit.....	347
21.3	Kontrollkarten für die zählende Prüfung.....	350
21.3.1	p -Karte.....	350
21.4	Kontrollkarten mit Gedächtnis.....	355
21.5	Kostenoptimale Prozeßkontrolle.....	359
22	Annahmestichprobenprüfung	360
22.1	Einführung.....	360
22.2	Prüfpläne für die Attributprüfung.....	362
22.2.1	Einfache Stichprobenprüfung.....	362
22.2.1.1	Aufbau eines einfachen Prüfplans.....	362
22.2.1.2	Operationscharakteristik für den einfachen Prüfplan.....	364
22.2.1.3	Bestimmung der Kenngrößen des Prüfplans.....	367

22.2.1.4	Durchschlupf und mittlerer Prüfaufwand.....	368
22.2.2	Doppelte Stichprobenprüfung.....	369
22.2.3	Mehrfach- und Sequential-Stichprobenprüfung.....	372
22.3	Prüfpläne für die Variablenprüfung.....	373
22.3.1	Aufbau eines einfachen Prüfplans.....	373
22.3.2	Operationscharakteristik für den Prüfplan.....	376
22.3.3	Bestimmung der Kenngrößen des Prüfplans.....	377
22.4	Standardisierung von Prüfplänen.....	379
22.4.1	Stichprobensysteme.....	379
22.4.2	Stichprobensysteme für die Attributprüfung.....	379
22.4.3	Stichprobensysteme für die Variablenprüfung.....	381

Anhang

Tafel I:	Verteilungsdichte $\varphi(x)$ der standardisierten Normalverteilung.....	384
Tafel II:	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung.....	386
Tafel III:	Quantile z_q der standardisierten Normalverteilung.....	388
Tafel IV:	Zweistellige Zufallszahlen.....	389
Tafel V:	Quantile $t_{m,q}$ der t -Verteilung.....	390
Tafel VI:	Quantile $\chi_{m,q}^2$ der χ^2 -Verteilung.....	391
Tafel VII:	Quantile $F_{m_1,m_2,q}$ der \mathcal{F} -Verteilung für $q = 0,95$ und $q = 0,99$	392
Tafel VIII:	Kritische Werte für den Kolmogoroff-Test.....	398
Tafel IX:	Toleranzfaktoren $k_{n,\beta,\gamma}$ für normalverteilte Grundgesamtheit (μ und σ^2 unbekannt).....	399
Tafel X:	Mindeststichprobenumfang n_0 für zweiseitiges verteilungsfreies Toleranzintervall.....	400
Tafel XI:	Mindeststichprobenumfang \tilde{n}_0 für einseitiges verteilungsfreies To- leranzintervall.....	400
Tafel XII:	Kritische Werte $l_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ für den Lord-Test zur Prüfung von $H_0 : \mu = \mu_0$	400
Tafel XIII:	Kritische Werte $l_{n_1,n_2,1-\frac{\alpha}{2}}$ für den Spannweitentest nach Lord zur Prü- fung von $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ($n_1 = n_2$).....	400
Tafel XIV:	Kritische Werte $p_{n_1,n_2,1-\alpha}$ für den Test nach Pillai und Buenaventura zur Prüfung von $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ für $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$	401
Tafel XV:	Quantile $a_{m_1,m_2,q}$ der Verteilung der studentisierten Variationsbreite ($q = 0,95$ und $q = 0,99$).....	402
Tafel XVI:	Zufallshöchstwerte des Korrelationskoeffizienten.....	404
Tafel XVII:	Kritische Werte für den X-Test von van der Waerden.....	405
Tafel XVIII:	Kritische Werte $w_{n,\alpha}$ für den Ausreißertest bei normalverteilter Grund- gesamtheit (μ und σ^2 unbekannt).....	407
Tafel XIX:	Kritische Werte $\tau_{n,\alpha}$ für die Ausreißertests nach Dixon.....	407
Tafel XX:	Faktoren zur Berechnung der Kontrollgrenzen.....	408
Literatur- und Quellenverzeichnis.....		410
Auswahl englischer Fachausdrücke.....		417
Sachwortverzeichnis.....		420