

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität | 11 |
| 2.1 | Kondition eines Problems | 11 |
| 2.1.1 | Elementare Beispiele | 12 |
| 2.1.2 | Bemessen, Normen | 15 |
| 2.1.3 | Relative und Absolute Kondition | 18 |
| 2.1.4 | Relative Konditionszahlen skalarwertiger Probleme ... | 19 |
| 2.1.5 | Operatornormen, Konditionszahlen linearer Abbildungen | 26 |
| 2.2 | Rundungsfehler und Gleitpunktarithmetik | 35 |
| 2.2.1 | Zahldarstellungen | 35 |
| 2.2.2 | Rundung, Maschinengenauigkeit | 37 |
| 2.2.3 | Gleitpunktarithmetik und Fehlerverstärkung bei elementaren Rechenoperationen | 39 |
| 2.3 | Stabilität eines Algorithmus | 42 |
| 2.4 | Übungen | 48 |
| 3 | Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren | 51 |
| 3.1 | Vorbemerkungen, Beispiele | 51 |
| 3.2 | Kondition und Störungssätze | 58 |
| 3.2.1 | Zeilenskalierung | 62 |
| 3.3 | Wie man es nicht machen sollte | 64 |
| 3.4 | Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen | 65 |
| 3.5 | Gauß-Elimination, <i>LR</i> -Zerlegung | 68 |
| 3.5.1 | Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung | 71 |
| 3.5.2 | Numerische Durchführung der <i>LR</i> -Zerlegung und Implementierungshinweise | 76 |
| 3.5.3 | Einige Anwendungen der <i>LR</i> -Zerlegung | 79 |
| 3.6 | Cholesky-Zerlegung | 82 |
| 3.7 | Bandmatrizen | 88 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.8 | Stabilitätsanalyse bei der LR - und Cholesky-Zerlegung | 91 |
| 3.9 | QR -Zerlegung | 92 |
| 3.9.1 | Givens-Rotationen | 95 |
| 3.9.2 | Householder-Transformationen | 101 |
| 3.10 | Übungen | 107 |
| 4 | Lineare Ausgleichsrechnung | 117 |
| 4.1 | Einleitung | 117 |
| 4.2 | Das lineare Ausgleichsproblem | 120 |
| 4.3 | Kondition des linearen Ausgleichsproblems | 124 |
| 4.4 | Numerische Lösung des linearen Ausgleichsproblems | 127 |
| 4.4.1 | Lösung der Normalgleichungen | 127 |
| 4.4.2 | Lösung über QR -Zerlegung | 129 |
| 4.5 | Zum statistischen Hintergrund – lineare Regression* | 132 |
| 4.6 | Orthogonale Projektion auf einen Teilraum* | 135 |
| 4.7 | Singulärwertzerlegung (SVD) und Pseudoinverse* | 142 |
| 4.7.1 | Berechnung von Singulärwerten | 148 |
| 4.7.2 | Rangbestimmung | 150 |
| 4.7.3 | Einige Anwendungshintergründe der SVD | 152 |
| 4.8 | Übungen | 153 |
| 5 | Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren 159 | |
| 5.1 | Vorbemerkungen | 159 |
| 5.2 | Kondition des Nullstellenproblems einer skalaren Gleichung . . | 162 |
| 5.3 | Fixpunktiteration | 164 |
| 5.4 | Konvergenzordnung und Fehlerschätzung | 175 |
| 5.5 | Berechnung von Nullstellen von skalaren Gleichungen | 180 |
| 5.5.1 | Bisektion | 180 |
| 5.5.2 | Das Newton-Verfahren | 181 |
| 5.5.3 | Newton-ähnliche Verfahren | 186 |
| 5.5.4 | Zusammenfassende Hinweise zu den Methoden für skalare Gleichungen | 190 |
| 5.6 | Das Newton-Verfahren für Systeme | 190 |
| 5.6.1 | Grundlagen des Newton-Verfahrens | 190 |
| 5.6.2 | Hinweise zur praktischen Durchführung des Newton-Verfahrens | 196 |
| 5.7 | Berechnung von Nullstellen von Polynomen* | 203 |
| 5.8 | Übungen | 207 |
| 6 | Nichtlineare Ausgleichsrechnung | 213 |
| 6.1 | Problemstellung | 213 |
| 6.2 | Das Gauß-Newton-Verfahren | 215 |
| 6.2.1 | Analyse der Gauß-Newton-Methode | 216 |
| 6.2.2 | Das gedämpfte Gauß-Newton-Verfahren | 221 |
| 6.3 | Levenberg-Marquardt-Verfahren | 222 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.4 | Übungen | 224 |
| 7 | Berechnung von Eigenwerten | 227 |
| 7.1 | Einleitung | 227 |
| 7.2 | Einige theoretische Grundlagen | 230 |
| 7.3 | Eigenwertabschätzungen | 234 |
| 7.4 | Kondition des Eigenwertproblems | 235 |
| 7.5 | Vektoriteration | 238 |
| 7.6 | Inverse Vektoriteration | 243 |
| 7.7 | <i>QR</i> -Verfahren | 245 |
| | 7.7.1 Die Unterraumiteration | 246 |
| | 7.7.2 <i>QR</i> -Algorithmus | 252 |
| | 7.7.3 Praktische Durchführung des <i>QR</i> -Algorithmus | 253 |
| 7.8 | Übungen | 261 |
| 8 | Interpolation | 265 |
| 8.1 | Vorbemerkungen | 265 |
| 8.2 | Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome | 267 |
| | 8.2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lagrange-Polynom- interpolation | 267 |
| | 8.2.2 Auswertung des Interpolationspolynoms an einer oder wenigen Stellen | 270 |
| | 8.2.3 Darstellung des Interpolationspolynoms mittels der Potenzform | 272 |
| | 8.2.4 Darstellung des Interpolationspolynoms mittels der Newtonschen Interpolationsformel | 275 |
| | 8.2.5 Restglieddarstellung – Fehleranalyse | 280 |
| 8.3 | Hermite-Interpolation* | 285 |
| 8.4 | Numerische Differentiation | 290 |
| 8.5 | Grenzen der Polynominterpolation | 292 |
| 8.6 | Beispiel einer Splineinterpolation* | 294 |
| 8.7 | Trigonometrische Interpolation – Schnelle Fourier- Transformation* | 299 |
| | 8.7.1 Fourier-Reihen | 299 |
| | 8.7.2 Trigonometrische Interpolation und diskrete Fourier-Transformation | 306 |
| | 8.7.3 Schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform FFT) | 313 |
| 8.8 | Übungen | 318 |
| 9 | Splinefunktionen | 323 |
| 9.1 | Splineräume und Approximationsgüte | 324 |
| | 9.1.1 B-Splines | 326 |
| | 9.1.2 B-Splines als Basis für den Splineräum | 330 |
| | 9.1.3 Rechnen mit Linearkombinationen von B-Splines | 332 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 9.1.4 | Stabilität der B-Spline-Basis | 335 |
| 9.2 | Splineinterpolation | 336 |
| 9.3 | Datenfit-Smoothing Splines | 342 |
| 9.4 | Übungen | 346 |
| 10 | Numerische Integration | 347 |
| 10.1 | Einleitung | 347 |
| 10.2 | Newton-Cotes-Formeln | 351 |
| 10.3 | Gauß-Quadratur | 355 |
| 10.4 | Extrapolation und Romberg-Quadratur | 360 |
| 10.5 | Zweidimensionale Integrale | 365 |
| 10.5.1 | Transformation von Integralen | 365 |
| 10.5.2 | Integration über dem Einheitsquadrat | 369 |
| 10.5.3 | Integration über dem Einheitsdreieck | 370 |
| 10.6 | Übungen | 371 |
| 11 | Gewöhnliche Differentialgleichungen | 375 |
| 11.1 | Einführung | 375 |
| 11.2 | Reduktion auf ein System 1. Ordnung | 380 |
| 11.3 | Einige theoretische Grundlagen | 381 |
| 11.4 | Einfache Einschrittverfahren | 386 |
| 11.5 | Fehlerbetrachtungen für Einschrittverfahren | 393 |
| 11.5.1 | Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz | 393 |
| 11.5.2 | Zusammenhang zwischen Konsistenz und Konvergenz | 399 |
| 11.5.3 | Praktische Bedeutung der Konvergenzordnung | 404 |
| 11.5.4 | Extrapolation | 404 |
| 11.6 | Runge-Kutta-Einschrittverfahren | 406 |
| 11.6.1 | Explizite RK-Verfahren | 410 |
| 11.6.2 | Implizite RK-Verfahren* | 416 |
| 11.7 | Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren | 419 |
| 11.8 | Mehrschrittverfahren | 423 |
| 11.8.1 | Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren | 423 |
| 11.8.2 | Adams-Bashforth-Verfahren | 426 |
| 11.8.3 | Adams-Moulton-Verfahren | 428 |
| 11.8.4 | Prädiktor-Korrektor-Verfahren | 430 |
| 11.8.5 | Konvergenz von linearen Mehrschrittverfahren* | 432 |
| 11.9 | Steife Systeme | 436 |
| 11.9.1 | Einleitung | 436 |
| 11.9.2 | Stabilitätsintervalle | 440 |
| 11.9.3 | Stabilitätsgebiete: A-Stabilität* | 443 |
| 11.9.4 | Rückwärtsdifferenzenmethoden | 444 |
| 11.10 | Zusammenfassende Bemerkungen | 447 |
| 11.11 | Übungen | 449 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 12 | Partielle Differentialgleichungen | 455 |
| 12.1 | Problemstellung und Prototypen | 455 |
| 12.2 | Korrekt gestellte Probleme – Kondition* | 465 |
| 12.3 | Differenzenverfahren für elliptische Randwertaufgaben | 470 |
| 12.3.1 | Diskretisierung der Poisson-Gleichung | 470 |
| 12.3.2 | Diskretisierung einer Konvektions-Diffusionsgleichung | 474 |
| 12.3.3 | Fourieranalyse | 478 |
| 12.3.4 | Diskretisierungsfehleranalyse – Stabilität und Konsistenz | 480 |
| 12.4 | Finite-Elemente-Methode für elliptische Randwertaufgaben* | 490 |
| 12.4.1 | Schwache Formulierung eines elliptischen Randwertproblems | 491 |
| 12.4.2 | Satz von Lax-Milgram und Galerkin-Diskretisierung | 495 |
| 12.4.3 | Korrektgestelltheit der schwachen Formulierung elliptischer Randwertprobleme | 500 |
| 12.4.4 | Galerkin-Diskretisierung mit Finite-Elemente-Räumen | 502 |
| 12.4.5 | Diskretisierungsfehleranalyse | 506 |
| 12.4.6 | A-posteriori Fehlerschranken und Adaptivität | 511 |
| 12.4.7 | Matrix-Vektor Darstellung des diskreten Problems | 516 |
| 12.5 | Finite-Volumen-Methode für elliptische Randwertaufgaben | 523 |
| 12.5.1 | Finite-Volumen Methode mit Voronoi-Kontrollvolumina | 527 |
| 12.5.2 | Finite-Volumen Methode mit einem dualen Gitter | 530 |
| 12.6 | Fazit: Vergleich der Methoden | 534 |
| 12.7 | Diskretisierung parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben | 536 |
| 12.8 | Übungen | 538 |
| 13 | Große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren | 543 |
| 13.1 | Beispiele großer dünnbesetzter Gleichungssysteme | 543 |
| 13.2 | Eigenschaften von Steifigkeitsmatrizen | 545 |
| 13.3 | Lineare Iterationsverfahren | 549 |
| 13.3.1 | Einleitung | 549 |
| 13.3.2 | Das Jacobi-Verfahren | 554 |
| 13.3.3 | Das Gauß-Seidel-Verfahren | 558 |
| 13.3.4 | SOR-Verfahren | 561 |
| 13.4 | Die Methode der konjugierten Gradienten | 566 |
| 13.5 | Vorkonditionierung | 575 |
| 13.6 | Zusammenfassende Bemerkungen | 583 |
| 13.7 | Übungen | 584 |
| 14 | Numerische Simulationen: Vom Pendel bis zum Airbus | 589 |
| 14.1 | Taktmechanismus | 590 |
| 14.2 | Datenfit | 593 |
| 14.3 | Ein Masse-Feder System | 596 |

XVIII Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----------------------------------|---|------------|
| 14.4 | Wärmeleitung | 602 |
| 14.5 | Komplexere Beispiele numerischer Simulationen | 607 |
| 14.5.1 | Inverses Wärmeleitproblem in einem welligen Rieselfilm | 608 |
| 14.5.2 | Inkompressible Strömung in einer Blutpumpe | 615 |
| 14.5.3 | Kompressible Strömung um einen Flugzeugflügel | 620 |
| 14.6 | Übungen | 624 |
| Literaturverzeichnis | | 627 |
| Sachverzeichnis | | 629 |