

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	13
1.1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen	13
1.1.1 Mengen	13
1.1.2 Funktionen	14
1.1.3 Der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen	15
1.1.4 Körper	15
1.1.5 Angeordnete Körper	16
1.1.6 Schranken	17
1.1.7 Vollständigkeitsaxiom	19
1.2 Aufgaben	20
1.2.1 Körper	20
1.2.2 Rechnen in Körpern	21
1.2.3 Angeordnete Körper	22
1.2.4 Rechnen mit Ungleichungen	25
1.2.5 Rechnen mit Absolutbeträgen	27
1.2.6 Schranken	29
1.3 Natürliche Zahlen und Induktion	31
1.3.1 Induktive Mengen, natürliche und ganze Zahlen	31
1.3.2 Induktionsprinzip	31
1.3.3 Summen, Produkte, Potenzen	32
1.3.4 Fakultät und Binomialkoeffizienten	33
1.3.5 Einige wichtige Summenformeln	34
1.3.6 Einige wichtige Ungleichungen	35
1.3.7 Rationale und algebraische Zahlen	36
1.3.8 Abzählbare Mengen	37
1.4 Aufgaben	38
1.4.1 Induktive Mengen	38
1.4.2 Kombinatorisches	38

1.4.3	Binomialkoeffizienten	40
1.4.4	Noch mehr Induktionsbeweise	41
1.4.5	Endliche Summen	43
1.4.6	Beweis einiger Ungleichungen	45
1.4.7	Abzählbarkeit	49
1.5	Reelle Funktionen	51
1.5.1	Potenzen und Wurzeln	51
1.5.2	Gerade, ungerade und periodische Funktionen	52
1.5.3	Treppenfunktionen	53
1.5.4	Beschränkte und monotone Funktionen	53
1.5.5	Extremwerte	54
1.5.6	Lineare, affine und konvexe Funktionen	54
1.5.7	Polynome	56
1.5.8	Interpolation	58
1.5.9	Rationale Funktionen	59
1.6	Aufgaben	61
1.6.1	Gerade und ungerade Funktionen	61
1.6.2	Konvexe Funktionen	61
1.6.3	Fixpunktsatz für monotone Funktionen	64
1.6.4	Potenzfunktionen	64
1.6.5	Nullstellen von Polynomen	66
1.6.6	Anwendung des Identitätssatzes	67
1.6.7	Interpolation	68
1.6.8	Partialbruchzerlegungen	70
1.7	Topologisches	71
1.7.1	Intervalle	71
1.7.2	Umgebungen, innere Punkte, offene Mengen	72
1.7.3	Berührungspunkte, abgeschlossene Mengen	72
1.7.4	Häufungspunkte, isolierte Punkte	73
1.7.5	Offene Überdeckungen, Kompaktheit	74
1.7.6	Nullmengen	74
1.7.7	Kompaktifizierung von \mathbb{R} durch $\pm\infty$	75
1.8	Aufgaben	76
1.8.1	Untersuchung konkreter Mengen	76
1.8.2	Offene und abgeschlossene Mengen	77
1.8.3	Topologische Inklusionen und Identitäten	79
1.8.4	Intervallschachtelungen	79
1.8.5	Kompakte Mengen	81
1.8.6	Überdeckungen	83

1.8.7	Nullmengen	83
1.8.8	Cantor Menge	84
2	Folgen und Reihen	87
2.1	Zahlenfolgen	87
2.1.1	Folgen	87
2.1.2	Konvergenzkriterien	89
2.1.3	Rechenregeln für konvergente Folgen	89
2.1.4	Teilfolgen und Häufungswerte	90
2.1.5	limsup und liminf von Zahlenfolgen	91
2.2	Aufgaben	93
2.2.1	ε - n_0 -Beweise	93
2.2.2	Monotone Folgen	94
2.2.3	Cauchy Kriterium	96
2.2.4	Häufungswerte einer Folge	97
2.2.5	Rekursive Folgen	99
2.2.6	Ein paar konkrete Beispiele	101
2.2.7	Ein paar abstrakte Beispiele	102
2.2.8	Mittelbildung bei Folgen	104
2.2.9	Ein l'Hospital für Folgen	105
2.2.10	Limes Inferior und Superior	106
2.2.11	Uneigentliche Grenzwerte	108
2.3	Zahlenreihen	109
2.3.1	Reihen	109
2.3.2	Konvergenzkriterien	110
2.3.3	Vergleichskriterien	112
2.3.4	Klammersetzen in Reihen	114
2.3.5	Umordnen von Reihen	115
2.3.6	Doppelfolgen und -Reihen	115
2.3.7	Reihenprodukte	116
2.4	Aufgaben	118
2.4.1	Geschlossene Auswertung unendlicher Reihen	118
2.4.2	Anwendung des Monotonie-Kriteriums	119
2.4.3	Anwendung des Cauchy-Kriteriums	120
2.4.4	Beweis einiger Kriterien	121
2.4.5	g-adische Brüche	122
2.4.6	Zum Satz von Olivier	123
2.4.7	Beweise mit Hilfe partieller Summation	125
2.4.8	Einige konkrete Beispiele	125

2.4.9	Ein paar theoretische Beispiele	126
2.4.10	Klammersetzen in unendlichen Reihen	128
2.4.11	Umordnen bedingt konvergenter Reihen	129
2.4.12	Zum Cauchy-Produkt	132
2.4.13	Doppelreihen	134
2.5	Funktionenfolgen und -Reihen	136
2.5.1	Punktweise Konvergenz	136
2.5.2	Gleichmäßige Konvergenz	136
2.5.3	Folgerungen aus der gleichmäßigen Konvergenz	137
2.5.4	Rechenregeln für gleichmäßige Konvergenz	138
2.5.5	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz	139
2.5.6	Lokal gleichmäßige bzw kompakte Konvergenz	141
2.6	Aufgaben	142
2.6.1	Zwei konkrete Konvergenzuntersuchungen	142
2.6.2	Weitere Beispiele	144
2.6.3	Beweis einiger Rechenregeln	146
2.6.4	Beweise einiger Kriterien aus Abschnitt 2.5.5	148
2.6.5	Kompakte bzw lokal gleichmäßige Konvergenz	151
3	Stetige Funktionen	153
3.1	Grenzwerte von Funktionen	153
3.1.1	Funktionsgrenzwerte	153
3.1.2	Kriterien für Funktionsgrenzwerte	154
3.1.3	Rechenregeln	155
3.1.4	limsup und liminf von Funktionen	157
3.2	Stetige Funktionen	158
3.2.1	Stetigkeit	158
3.2.2	Rechenregeln	159
3.2.3	Unstetigkeitsstellen und stetige Ergänzbarkeit	159
3.2.4	Stetigkeit auf Punktengen	160
3.2.5	Lipschitz- und Hölder-Stetigkeit	161
3.2.6	Gleichmäßige Stetigkeit	162
3.2.7	Stetigkeit der Grenzfunktion	163
3.2.8	Weierstraßscher Approximationssatz	163
3.3	Aufgaben	164
3.3.1	Funktionsgrenzwerte	164
3.3.2	Konkrete Stetigkeitsbeweise	165
3.3.3	Allgemeine Stetigkeitsuntersuchungen	168
3.3.4	Stetigkeitskriterien	169

3.3.5	Folgerungen aus der Stetigkeit	170
3.3.6	Fixpunktsätze und andere Anwendungen	172
3.3.7	Konkrete Untersuchung auf gleichmäßige Stetigkeit	174
3.3.8	Theoretisches zur gleichmäßigen Stetigkeit	176
3.3.9	Lipschitz- und Hölder-Stetigkeit	177
3.3.10	Stetigkeit und Kompaktheit	179
4	Differenzierbare Funktionen	181
4.1	Differenzierbarkeit und Mittelwertsätze	181
4.1.1	Differenzierbarkeit	181
4.1.2	Höhere Ableitungen	183
4.1.3	Ableitungsregeln	184
4.1.4	Folgerungen aus der Differenzierbarkeit in einem Punkt	185
4.1.5	Differenzierbarkeit der Grenzfunktion	186
4.1.6	Mittelwertsätze	187
4.1.7	Folgerungen	188
4.2	Aufgaben	191
4.2.1	Differenzierbarkeit	191
4.2.2	Höhere Ableitungen	194
4.2.3	Technik des Differenzierens	195
4.2.4	Anwendungen des Mittelwertsatzes	199
4.2.5	Kurvendiskussionen	200
4.2.6	Extremwertaufgaben	202
4.2.7	Konvexe Funktionen	205
4.2.8	Zwischenwertsatz für Ableitungen	207
4.3	Taylorreihen und Potenzreihen	208
4.3.1	Taylor-Polynom und Taylor-Reihe	208
4.3.2	Restglieddarstellungen	209
4.3.3	Potenzreihen	210
4.3.4	Wichtige Eigenschaften von Potenzreihen	211
4.3.5	Rechnen mit Potenzreihen	212
4.4	Aufgaben	214
4.4.1	Beispiele konvergenter Taylorreihen	214
4.4.2	Potenzreihenentwicklung durch Ableiten	216
4.4.3	Abschreckende Beispiele von Taylorreihen	218
4.4.4	Taylorpolynom und Restgliedabschätzung	220
4.4.5	Potenzreihen	221
4.4.6	Rechnen mit Potenzreihen	222
4.4.7	Zum Abelschen Grenzwertsatz	225

4.5	Elementare Funktionen	228
4.5.1	Exponentialfunktion und Logarithmus	228
4.5.2	Trigonometrische (Kreis-) Funktionen	230
4.5.3	Hyperbelfunktionen	232
4.6	Aufgaben	235
4.6.1	Einige Formeln	235
4.6.2	Trigonometrische Funktionen	237
4.6.3	Überlagern von Schwingungen	239
4.6.4	Logarithmus und Exponentialfunktion	241
4.6.5	Ungleichungen von Hölder und Minkowski	244
4.6.6	Charakterisierung der Exponentialfunktionen	246
4.6.7	Bernoulli Zahlen	246
5	Riemannsches Integral	251
5.1	Integrierbare Funktionen	251
5.1.1	Zerlegungen, Unter- und Obersummen, Integral	252
5.1.2	Zwischensummen	253
5.1.3	Eigenschaften des Riemann-Integrals	254
5.1.4	Integralungleichungen	255
5.1.5	Regelfunktionen	256
5.1.6	Integral von Regelfunktionen	257
5.1.7	Stammfunktionen	258
5.1.8	Hauptsatz der Analysis	259
5.1.9	Mittelwertsätze der Integralrechnung	260
5.1.10	Vertauschen von Limes und Integral	261
5.1.11	Numerische Integration	263
5.2	Aufgaben	264
5.2.1	Aufgaben zur Integrierbarkeit	264
5.2.2	Integralberechnung mit Riemann-Summen	266
5.2.3	Beweise mit Riemann Summen	268
5.2.4	Grenzwerte Riemannscher Summen	273
5.2.5	Zum Hauptsatz	274
5.2.6	Anwendungen der Mittelwertsätze	277
5.2.7	Regelfunktionen	278
5.3	Technik des Integrierens	280
5.3.1	Partielle Integration	280
5.3.2	Beispiele	280
5.3.3	Substitutionsregel	284
5.3.4	Integration rationaler Funktionen	285

5.3.5	Einige Standardsubstitutionen	285
5.3.6	Ein paar technische Beweise	288
5.4	Uneigentliche Integrale	292
5.4.1	Definitionen	292
5.4.2	Rechenregeln	294
5.4.3	Konvergenzkriterien	295
5.4.4	Uneigentliche Integrale von Funktionenfolgen	296
5.5	Aufgaben zu uneigentlichen Integralen	298
5.5.1	Konkrete Berechnungen	298
5.5.2	Konkrete Konvergenzuntersuchungen	300
5.5.3	Beweise einiger Kriterien	302
5.5.4	Klassische Beispiele	305
5.5.5	Uneigentliche Integrale und Funktionenfolgen	310
5.5.6	Zum Cauchy-Hauptwert	315
	Literaturverzeichnis	317
	Lebensdaten	318
	Potenzreihenentwicklungen	320
	Ableitungen und Stammfunktionen	321
	Symbolverzeichnis	322
	Index	323