

Inhalt

§ 1	In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar	25
§ 2	Die Prüfung muß sich schließlich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises	25
§ 3	Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, a priori oder a posteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke	26
§ 4	Die Aufgabe dieses Buches	28

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5	Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt	29
§ 6	Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Graßmanns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft . .	30
§ 7	Mills Meinung, daß die Definitionen der einzelnen Zahlen beobachtete Tatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet	32
§ 8	Zur Rechtmäßigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Tatsachen nicht erforderlich	34

*Sind die Gesetze der Arithmetik induktive
Wahrheiten?*

- § 9 Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen 36
- § 10 Gründe dagegen, daß die Additions Gesetze induktive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induktion ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen . . . 37
- § 11 Leibnizens »Eingeboren« 40

*Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch
a priori oder analytisch?*

- § 12 Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnisgrund 40
- § 13 Unterschied von Arithmetik und Geometrie . . 42
- § 14 Vergleichung der Wahrheiten in bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet 43
- § 15 Ansichten von Leibniz und St. Jevons 44
- § 16 Dagegen Mills Herabsetzung des »kunstfertigen Handhabens der Sprache«. Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten 45
- § 17 Unzulänglichkeit der Induktion. Vermutung, daß die Zahlgesetze analytische Urteile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Wertschätzung der analytischen Urteile 46

II. Meinungen einiger Schriftsteller über den
Begriff der Anzahl

- § 18 Notwendigkeit, den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen 47

- § 19 Die Definition darf nicht geometrisch sein 48
 § 20 Ist die Zahl definierbar? Hankel. Leibniz 49

*Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äußern
Dinge?*

- § 21 Meinungen von M. Cantor und E. Schröder 50
 § 22 Dagegen Baumann: die äußern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab 50
 § 23 Mills Meinung, daß die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar 52
 § 24 Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden 53
 § 25 Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen 55

Ist die Zahl etwas Subjektives?

- § 26 Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung paßt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objektives 56
 § 27 Die Zahl ist nicht, wie Schlömilch will, Vorstellung der Stelle eines Objekts in einer Reihe 59

Die Anzahl als Menge

- § 28 Thomaes Namengebung 60

III. Meinungen über Einheit und Eins

Drückt das Zahlwort »Ein« eine Eigenschaft von Gegenständen aus?

- § 29 Vieldeutigkeit der Ausdrücke »μονάς« und »Einheit«. E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjektiv »Ein« enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Prädikat dienen 61
- § 30 Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen 63
- § 31 Baumanns Merkmale der Ungeteiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objekte zugeführt (Locke) 64
- § 32 Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungeteiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird 64
- § 33 Die Unteilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar 65

Sind die Einheiten einander gleich?

- § 34 Die Gleichheit als Grund für den Namen »Einheit«. E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraktion von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich 66
- § 35 Die Verschiedenheit ist sogar notwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons 68
- § 36 Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stößt auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons 68
- § 37 Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins 70

- § 38 »Eins« ist Eigenname, »Einheit« Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definiert werden. Unterschied von »und« und + 70
- § 39 Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von »Einheit« verdeckt 72

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden

- § 40 Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons 73
- § 41 Der Zweck wird nicht erreicht 75
- § 42 Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen 75
- § 43 Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1 76
- § 44 Jevons' Abstrahieren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1 sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen 77

Lösung der Schwierigkeit

- § 45 Rückblick 79
- § 46 Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, daß bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere 80
- § 47 Die Tatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objektivität des Begriffes 81
- § 48 Auflösung einiger Schwierigkeiten 82
- § 49 Bestätigung bei Spinoza 83
- § 50 E. Schröders Ausführung 84
- § 51 Berichtigung derselben 85
- § 52 Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche 85
- § 53 Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl . . . 86

- § 54 Einheit kann man das Subjekt einer Zahlangabe nennen. Unteilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit . . . 87

IV. Der Begriff der Anzahl

Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand

- § 55 Versuch, die Leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen 88
- § 56 Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Teil ist 89
- § 57 Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen 90
- § 58 Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar 90
- § 59 Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschließen, weil er unvorstellbar ist 91
- § 60 Selbst konkrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muß die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt 92
- § 61 Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objektive Gegenstand ist räumlich 93

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muß man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen

- § 62 Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit 94
- § 63 Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches. Logisches Bedenken, daß die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird 94
- § 64 Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Rich-

	ting, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks	95
§ 65	Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird	97
§ 66	Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend	98
§ 67	Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, daß man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist	99
§ 68	Die Anzahl als Umfang eines Begriffes	100
§ 69	Erläuterung	101

Ergänzung und Bewährung unserer Definition

§ 70	Der Beziehungsbegriff	102
§ 71	Die Zuordnung durch eine Beziehung	104
§ 72	Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl	105
§ 73	Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung gibt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet	106
§ 74	Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe »sich selbst ungleich« zukommt	107
§ 75	Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist	108
§ 76	Erklärung des Ausdrucks »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m«	109
§ 77	1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt	110
§ 78	Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind	111
§ 79	Definition des Folgens in einer Reihe	112

§ 80	Bemerkungen hierzu. Objektivität des Folgens	113
§ 81	Erklärung des Ausdrucks »x gehört der mit y endenden φ -Reihe an«	114
§ 82	Andeutung des Beweises, daß es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe gibt	114
§ 83	Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber	115

Unendliche Anzahlen

§ 84	Die Anzahl, welche dem Begriffe »endliche Anzahl« zukommt, ist eine unendliche	116
§ 85	Die Cantorsche unendlichen Anzahlen; »Mächtigkeit«. Abweichung in der Benennung	117
§ 86	Cantors Folgen in der Sukzession und mein Folgen in der Reihe	118

V. Schluß

§ 87	Die Natur der arithmetischen Gesetze	119
§ 88	Kants Unterschätzung der analytischen Urteile	119
§ 89	Kants Satz: »Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden.« Kants Verdienst um die Mathematik	121
§ 90	Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlußkette	122
§ 91	Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich	123

Andere Zahlen

§ 92	Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel	124
§ 93	Die Zahlen sind weder räumlich außer uns noch subjektiv	125
§ 94	Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes ver-	

	bürgt nicht, daß etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises	125
§ 95	Man darf nicht ohne weiteres (c-b) als ein Zeichen ansehen, das die Subtraktionsaufgabe löst . .	126
§ 96	Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen	127
§ 97	Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden	128
§ 98	Hankels Erklärung der Addition	129
§ 99	Mangelhaftigkeit der formalen Theorie	129
§ 100	Versuch, komplexe Zahlen dadurch nachzuweisen, daß die Bedeutung der Multiplikation in besonderer Weise erweitert wird	130
§ 101	Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig . .	131
§ 102	Die bloße Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung	131
§ 103	Kossaks Erklärung der komplexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung	132
§ 104	Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurteils für die neuen Zahlen festzusetzen	133
§ 105	Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter	135
§ 106-109	Rückblick	135