

## Inhalt

§ 1	In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar . . . . .	25
§ 2	Die Prüfung muß sich schließlich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises . . . . .	25
§ 3	Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, a priori oder a posteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke . . . . .	26
§ 4	Die Aufgabe dieses Buches . . . . .	28

### I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze

#### *Sind die Zahlformeln beweisbar?*

§ 5	Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt . . . . .	29
§ 6	Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Graßmanns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft . .	30
§ 7	Mills Meinung, daß die Definitionen der einzelnen Zahlen beobachtete Tatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet . . . . .	32
§ 8	Zur Rechtmäßigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Tatsachen nicht erforderlich	34

*Sind die Gesetze der Arithmetik induktive  
Wahrheiten?*

- § 9 Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen . . . . . 36
- § 10 Gründe dagegen, daß die Additions Gesetze induktive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induktion ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen . . . 37
- § 11 Leibnizens »Eingeboren« . . . . . 40

*Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch  
a priori oder analytisch?*

- § 12 Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnisgrund . . . . . 40
- § 13 Unterschied von Arithmetik und Geometrie . . 42
- § 14 Vergleichung der Wahrheiten in bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet . . . . . 43
- § 15 Ansichten von Leibniz und St. Jevons . . . . . 44
- § 16 Dagegen Mills Herabsetzung des »kunstfertigen Handhabens der Sprache«. Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten . . . . . 45
- § 17 Unzulänglichkeit der Induktion. Vermutung, daß die Zahlgesetze analytische Urteile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Wertschätzung der analytischen Urteile . . . . . 46

II. Meinungen einiger Schriftsteller über den  
Begriff der Anzahl

- § 18 Notwendigkeit, den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen . . . . . 47

- § 19 Die Definition darf nicht geometrisch sein . . . . . 48  
 § 20 Ist die Zahl definierbar? Hankel. Leibniz . . . . . 49

*Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äußern  
Dinge?*

- § 21 Meinungen von M. Cantor und E. Schröder . . . . . 50  
 § 22 Dagegen Baumann: die äußern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab . . . . . 50  
 § 23 Mills Meinung, daß die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar . . . . . 52  
 § 24 Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden . . . . . 53  
 § 25 Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen . . . . . 55

*Ist die Zahl etwas Subjektives?*

- § 26 Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung paßt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objektives . . . . . 56  
 § 27 Die Zahl ist nicht, wie Schlömilch will, Vorstellung der Stelle eines Objekts in einer Reihe . . . . . 59

*Die Anzahl als Menge*

- § 28 Thomaes Namengebung . . . . . 60

## III. Meinungen über Einheit und Eins

*Drückt das Zahlwort »Ein« eine Eigenschaft von Gegenständen aus?*

- § 29 Vieldeutigkeit der Ausdrücke »μονάς« und »Einheit«. E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjektiv »Ein« enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Prädikat dienen . . . . . 61
- § 30 Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen . . . . . 63
- § 31 Baumanns Merkmale der Ungeteiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objekte zugeführt (Locke) . . . . . 64
- § 32 Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungeteiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird . . . . . 64
- § 33 Die Unteilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar . . . . . 65

*Sind die Einheiten einander gleich?*

- § 34 Die Gleichheit als Grund für den Namen »Einheit«. E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraktion von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich . . . . . 66
- § 35 Die Verschiedenheit ist sogar notwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons . . . . . 68
- § 36 Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stößt auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons . . . . . 68
- § 37 Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins . . . . . 70

- § 38 »Eins« ist Eigenname, »Einheit« Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definiert werden. Unterschied von »und« und + . . . . . 70
- § 39 Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von »Einheit« verdeckt . . . . 72

*Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden*

- § 40 Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons . . . . . 73
- § 41 Der Zweck wird nicht erreicht . . . . . 75
- § 42 Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen . . . . . 75
- § 43 Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1 . . . . . 76
- § 44 Jevons' Abstrahieren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1 sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen . . . . . 77

*Lösung der Schwierigkeit*

- § 45 Rückblick . . . . . 79
- § 46 Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, daß bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere . . . . . 80
- § 47 Die Tatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objektivität des Begriffes . . . . . 81
- § 48 Auflösung einiger Schwierigkeiten . . . . . 82
- § 49 Bestätigung bei Spinoza . . . . . 83
- § 50 E. Schröders Ausführung . . . . . 84
- § 51 Berichtigung derselben . . . . . 85
- § 52 Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche . . . . . 85
- § 53 Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl . . . 86

- § 54 Einheit kann man das Subjekt einer Zahlangabe nennen. Unteilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit . . . 87

#### IV. Der Begriff der Anzahl

##### *Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand*

- § 55 Versuch, die Leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen . . . . . 88
- § 56 Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Teil ist . . . . . 89
- § 57 Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen . . . . . 90
- § 58 Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar . . . . . 90
- § 59 Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschließen, weil er unvorstellbar ist . . . . . 91
- § 60 Selbst konkrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muß die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt . . . . . 92
- § 61 Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objektive Gegenstand ist räumlich . . . . . 93

##### *Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muß man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen*

- § 62 Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit . . . . . 94
- § 63 Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches. Logisches Bedenken, daß die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird . . . . . 94
- § 64 Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Rich-

	tung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks . . . . .	95
§ 65	Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird . . . . .	97
§ 66	Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend . . . . .	98
§ 67	Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, daß man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist . . . . .	99
§ 68	Die Anzahl als Umfang eines Begriffes . . . . .	100
§ 69	Erläuterung . . . . .	101

*Ergänzung und Bewährung unserer Definition*

§ 70	Der Beziehungsbegriff . . . . .	102
§ 71	Die Zuordnung durch eine Beziehung . . . . .	104
§ 72	Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl . . . . .	105
§ 73	Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung gibt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet . . . . .	106
§ 74	Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe »sich selbst ungleich« zukommt . . . . .	107
§ 75	Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist . . . . .	108
§ 76	Erklärung des Ausdrucks »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m« . . . . .	109
§ 77	1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt . . . . .	110
§ 78	Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind . . . . .	111
§ 79	Definition des Folgens in einer Reihe . . . . .	112

§ 80	Bemerkungen hierzu. Objektivität des Folgens	113
§ 81	Erklärung des Ausdrucks »x gehört der mit y endenden $\varphi$ -Reihe an« . . . . .	114
§ 82	Andeutung des Beweises, daß es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe gibt . . . . .	114
§ 83	Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber . . . . .	115

### *Unendliche Anzahlen*

§ 84	Die Anzahl, welche dem Begriffe »endliche Anzahl« zukommt, ist eine unendliche . . . . .	116
§ 85	Die Cantorsche unendlichen Anzahlen; »Mächtigkeit«. Abweichung in der Benennung . . . . .	117
§ 86	Cantors Folgen in der Sukzession und mein Folgen in der Reihe . . . . .	118

### V. Schluß

§ 87	Die Natur der arithmetischen Gesetze . . . . .	119
§ 88	Kants Unterschätzung der analytischen Urteile . . . . .	119
§ 89	Kants Satz: »Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden.« Kants Verdienst um die Mathematik . . . . .	121
§ 90	Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlußkette . . . . .	122
§ 91	Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich . . . . .	123

### *Andere Zahlen*

§ 92	Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel . . . . .	124
§ 93	Die Zahlen sind weder räumlich außer uns noch subjektiv . . . . .	125
§ 94	Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes ver-	

	bürgt nicht, daß etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises . . . . .	125
§ 95	Man darf nicht ohne weiteres (c-b) als ein Zeichen ansehen, das die Subtraktionsaufgabe löst . .	126
§ 96	Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen . . . . .	127
§ 97	Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden . . . . .	128
§ 98	Hankels Erklärung der Addition . . . . .	129
§ 99	Mangelhaftigkeit der formalen Theorie . . . . .	129
§ 100	Versuch, komplexe Zahlen dadurch nachzuweisen, daß die Bedeutung der Multiplikation in besonderer Weise erweitert wird . . . . .	130
§ 101	Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig . .	131
§ 102	Die bloße Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung . . . . .	131
§ 103	Kossaks Erklärung der komplexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung . . . . .	132
§ 104	Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurteils für die neuen Zahlen festzusetzen . . . . .	133
§ 105	Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter . . . . .	135
§ 106-109	Rückblick . . . . .	135