

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	6
Diagrammverzeichnis	8
Tabellenverzeichnis	10
Einleitung	11
1. Algebra und algebraisches Denken aus mathematischer und mathematikdidaktischer Perspektive	14
1.1 Algebra als ein Teilgebiet der Mathematik	14
1.2 Historische Sicht auf die Algebra	15
1.2.1 Rhetorische und synkopierte Algebra	16
1.2.2 Symbolische Algebra nach Viete	18
1.2.3 Abstrakte Algebra	18
1.3 Algebra aus mathematikdidaktischer Sicht	21
2. Relevanz der Algebra vs. Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern und daraus resultierende Forschungsfragen	24
2.1 Schwierigkeiten im Umgang mit Algebra und deren mögliche Ursachen	24
2.1.1 Studien zu Analysen von Schwierigkeiten und Defiziten	24
2.1.2 Arithmetik vs. Algebra	27
2.2 Bedeutung der Algebra	29
2.3 Unterschiedliche Ansätze der Vermittlung der Algebra	32
2.4 Forschungslücken und Forschungsfragen	34
3. Überlegungen zum algebraischen Denken	36
3.1. Aspekte algebraischen Denkens aus Sicht unterschiedlicher Autoren	37
3.1.1 Verallgemeinern	37
3.1.1.1 Verallgemeinern aus lernpsychologischer Sicht	37
3.1.1.2 Verallgemeinern aus mathematikdidaktischer Sicht	38
3.1.2 Symbole, Unbekannte, Variablen	45
3.1.3 Sicht auf Terme	50
3.1.4 Funktionale Beziehungen	54
3.1.4.1 Funktionales Denken	54
3.1.4.2 Entwicklung funktionalen Denkens	57
3.1.5 Mathematische Denkhandlungen und Aktivitäten aus algebraspezifischer Sicht	59
3.2 Komponenten algebraischen Denkens im Primärbereich	60
4. Untersuchungsdesign	65
4.1 Ziele der Untersuchung	65
4.2 Zur Methodologie	66
4.2.1 Überlegungen aus empirischer Forschungsperspektive	66
4.2.2 Datenerhebung	68

4.3 Durchführung	69
4.3.1 Konstruktion der Untersuchungsgruppe	70
4.3.2 Organisation und Ablauf der Vor- und Hauptstudie	73
4.3.2.1 Die Vorstudie	73
4.3.2.2 Die Hauptstudie	74
4.4 Analyse der Daten zum Zwecke der Auswertung	75
4.4.1 Verwendung von Kategorien zur Analyse	75
4.4.2 Entwicklung des Kategoriensystems	76
4.4.3 Das Kategorisieren (Vorgehen)	77
4.5 Zur Aufgabenserie und Reihenfolge deren Einsatzes	78
4.5.1 In der Untersuchung verwendete Aufgaben	78
4.5.2 Zum Einsatz der Aufgaben	84
4.5.3 Zusammenfassung	86
5. Aufgaben und Ergebnisse bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	87
5.1 Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen	88
5.1.1 Panini	88
5.1.1.2 Das Kategoriensystem	89
5.1.1.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor- und Hauptstudie und Differenzierung	92
5.1.1.4 Ergebnisse	93
5.1.2 Vorteilhaft Rechnen 1	95
5.1.2.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	96
5.1.2.2 Das Kategoriensystem der Teilaufgabe a)	97
5.1.2.3 Das Kategoriensystem der Teilaufgabe b)	100
5.1.2.4 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	102
5.1.2.5 Ergebnisse der Teilaufgabe a)	103
5.1.2.6 Ergebnisse der Teilaufgabe b)	106
5.1.2.7 Zusammenfassung „Vorteilhaft Rechnen 1“ Teilaufgaben a) und b)	108
5.1.3 Vorteilhaft Rechnen 2	109
5.1.3.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	109
5.1.3.2 Das Kategoriensystem	110
5.1.3.4 Ergebnisse	113
5.1.4 Zusammenfassung zur Komponente	116
5.2 Umgehen mit Operationen (als Objekte) und ihren Umkehrungen	119
5.2.1 Umtausch Teilaufgabe b)	119
5.2.1.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	119

5.2.1.2 Kategoriensystem Umgehen mit Operationen, speziell Umkehren von Gedankengängen der Aufgabe „Umtausch“ Teilaufgabe b)	120
5.2.1.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	122
5.2.1.4 Ergebnisse	123
5.2.2 Doppelte Rechenkette	127
5.2.2.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	128
5.2.2.2 Kategoriensystem Umgehen mit Operationen, speziell Eigenschaften von Rechenoperationen der Aufgabe „Doppelte Rechenkette“	129
5.2.2.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	132
5.2.2.4 Ergebnisse	133
5.2.3 Zusammenfassung zur Komponente	135
5.3 Umgehen mit Veränderungen	137
5.3.1 Taschengeld Teil 1	137
5.3.1.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	137
5.3.1.2 Kategoriensystem Umgehen mit Veränderungen der Aufgabe „Taschengeld Teil 1“	138
5.3.1.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	140
5.3.1.4 Ergebnisse	142
5.3.2 Umtausch Teilaufgabe c)	144
5.3.2.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	144
5.3.2.2 Kategoriensystem Umgehen mit Veränderungen der Aufgabe „Umtausch“ Teilaufgabe c)“	145
5.3.2.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	147
5.3.2.4 Ergebnisse	148
5.3.3 Zusammenfassung zur Komponente	150
5.4 Umgehen mit Unbekannten	152
5.4.1 Taschengeld Teil 2	152
5.4.1.1 Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens	152
5.4.1.2 Kategoriensystem Umgehen mit Unbekannten	153
5.4.1.3 Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	155
5.4.1.4 Ergebnisse	156
5.4.2 Zusammenfassung zur Komponente	159
5.5 Verallgemeinern	160
5.5.1 Tischreihe und Plättchenmuster jeweils Teilaufgabe b)	161

5.5.1.1	Beschreibung der Aufgaben bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens.....	162
5.5.1.2	Kategoriensystem Verallgemeinern der Aufgaben „Tischreihe“ Teilaufgabe b) und „Plättchenmuster“ Teilaufgabe b).....	163
5.5.1.3	Einsatz der Tischreihen - Aufgabe und Plättchenmuster – Aufgabe jeweils Teilaufgabe b) in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	167
5.5.1.4	Ergebnisse der Aufgabe „Tischreihe“ Teilaufgabe b).....	168
5.5.1.5	Ergebnisse der Aufgabe „Plättchenmuster“ Teilaufgabe b)	173
5.5.2	Zusammenfassung zur Komponente.....	178
5.6	Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen.....	180
5.6.1	Tischreihe und Plättchenmuster.....	181
5.6.1.1	Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens.....	182
5.6.1.2	Kategoriensystem Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen der Aufgaben „Tischreihe“ Teilaufgabe c) und „Plättchenmuster“ Teilaufgabe c)	182
5.6.1.3	Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	186
5.6.1.4	Ergebnisse der Aufgabe „Tischreihe“ Teilaufgabe c).....	187
5.6.1.5	Ergebnisse der Aufgabe „Plättchenmuster“ Teilaufgabe c).....	190
5.6.1.6	Zusammenfassung zu der Teilaufgaben c) der Aufgaben „Plättchenmuster“ und „Tischreihe“	194
5.6.2	Auf der Wiese	195
5.6.2.1	Beschreibung der Aufgabe bezüglich ihrer Komponente algebraischen Denkens.....	195
5.6.2.2	Kategoriensystem Umgehen mit (symbolischen) Repräsentationen der Aufgabe „Auf der Wiese“	196
5.6.2.3	Zum Einsatz der Aufgabe in der Vor – und Hauptstudie und Differenzierung	198
5.6.2.4	Ergebnisse der Aufgabe „Auf der Wiese“.....	199
5.6.3	Zusammenfassung zur Komponente.....	204
6.	Zusammenfassung.....	207
6.1.	Wie kann algebraisches Denken im Grundschulalter beschrieben werden?	208
6.2	Welche Fähigkeiten bezüglich des algebraischen Denkens sind bei Lernenden im vierten Schuljahr ohne vorherige spezifische Programme zu erfassen?	208
6.2.1	Erhebung und Auswertung der Daten	209
6.2.2	Beschreibt das Konstrukt algebraischen Denkens empirisch vorgefundene Verhaltensweisen von Grundschulkindern?	210
6.2.3	Inwieweit sind die einzelnen Komponenten bei der Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt?.....	210
6.2.4	Lassen sich Unterschiede in der Ausprägung des algebraischen Denkens innerhalb des Leistungsspektrums identifizieren?.....	215

7. Ausblick und Anschlussfragen	217
7.1 Folgerungen für die Lehreraus – und Weiterbildung	217
7.2 Anschlussfragen	219
Literaturverzeichnis	221
Anhang A	230
Interviewleitfäden mit entsprechenden Aufgaben	230
Anhang B	251
Verschlüsselung der Daten der Probandinnen und Probanden	251
Anhang C	254
Transkriptionsregeln	254