

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Benutzung des Buches	17
1 Zur Technik des Zahlenrechnens	25
1.1 Der Zahlbegriff	25
1.1.1 Die natürlichen Zahlen	25
1.1.2 Das dekadische Positionssystem	27
1.1.3 Das duale Positionssystem	29
1.1.4 Das römische Zahlensystem	34
1.1.5 Konstante und Variable	36
1.2 Das Rechnen mit Zahlen	39
1.2.1 Bezeichnungen	39
1.2.2 Die Teilbarkeit von Zahlen	40
1.2.2.1 Teiler einer Zahl	40
1.2.2.2 Teilbarkeitsregeln	41
1.2.2.3 Primzahlen	44
1.2.2.4 Der größte gemeinsame Teiler	46
1.2.2.5 Das kleinste gemeinsame Vielfache	49
1.2.3 Gewöhnliche Brüche	50
1.2.3.1 Begriffserklärungen	50
1.2.3.2 Erweitern und Kürzen von Brüchen	52
1.2.3.3 Addition und Subtraktion gewöhnlicher Brüche	53
1.2.3.4 Multiplikation von Brüchen	55
1.2.3.5 Der Kehrwert eines Bruches	56
1.2.3.6 Division von Brüchen	57
1.2.3.7 Doppelbrüche	58
1.2.3.8 Zusammenfassung Bruchrechnung	60
1.2.4 Dezimalbrüche	61
1.2.4.1 Begriffserklärungen	61
1.2.4.2 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	63
1.2.4.3 Multiplikation von Dezimalbrüchen	63
1.2.4.4 Division von Dezimalbrüchen	64
1.2.4.5 Umwandlung von Brüchen	66
1.2.4.6 Das Runden von Dezimalbrüchen	70
1.2.4.7 Bruch oder Dezimalzahl?	72
1.2.4.8 Größenvergleich von Brüchen	73
1.3 Rechenhilfsmittel	86
1.3.1 Taschenrechner	86
1.3.1.1 Grundrechenarten	88
1.3.1.2 Eingeben, Editieren, Löschen	89
1.3.1.3 Werte abspeichern	91
1.3.1.4 Terme berechnen	93
1.3.1.5 Funktionentasten	97
1.3.1.6 Verschiedene Arbeitsmodi	101
1.3.1.7 Kaufkriterien für einen Taschenrechner	101

1.3.2	Tabellenkalkulation	102
1.3.2.1	Kurze Einführung in Excel	102
1.3.2.2	Mathematik mit Excel	104
1.3.3	Computeralgebrasystem	104
1.3.3.1	Anwendungen für Derive	105
1.3.4	Funktionsplotter	105
2	Arithmetik	109
2.1	Die Rolle der Sprache in der Mathematik	109
2.1.1	Allgemeine Bemerkungen	109
2.1.2	Aussagen und Aussageformen	109
2.1.3	Verknüpfung von Aussagen	111
2.1.3.1	Einführendes Beispiel	111
2.1.3.2	Die Konjunktion	112
2.1.3.3	Die Disjunktion	113
2.1.3.4	Die Implikation	115
2.1.3.5	Die Äquivalenz	117
2.2	Grundbegriffe der Mengenlehre	120
2.2.1	Der Begriff der Menge	120
2.2.2	Zahlenmengen	122
2.2.3	Die Beschreibung von Mengen	123
2.2.3.1	Mengenschreibweise	124
2.2.3.2	Intervallschreibweise	127
2.2.4	Mengenrelationen	128
2.2.4.1	Teilmengen	128
2.2.4.2	Gleichheit zweier Mengen	129
2.2.5	Mengenoperationen	130
2.2.5.1	Vereinigung von Mengen	130
2.2.5.2	Durchschnitt von Mengen	132
2.2.5.3	Differenz zweier Mengen	135
2.3	Das Rechnen mit Variablen	139
2.3.1	Die vier Grundrechenoperationen	139
2.3.1.1	Einfache Rechenoperationen mit Variablen	139
2.3.1.2	Die negativen Zahlen	143
2.3.1.3	Addition und Subtraktion	146
2.3.1.4	Multiplikation	151
2.3.1.5	Division	153
2.3.2	Das Rechnen mit algebraischen Summen	155
2.3.2.1	Über die Bedeutung der Klammern	155
2.3.2.2	Setzen und Auflösen additiver und subtraktiver Klammern	156
2.3.2.3	Multiplikation von Klammerausdrücken	158
2.3.2.4	Ausklammern gemeinsamer Faktoren	162
2.3.2.5	Binomische Formeln	164
2.3.2.6	Die Quadratische Ergänzung	167
2.3.3	Bruchrechnung	169
2.3.3.1	Erweitern und Kürzen von Brüchen	170
2.3.3.2	Addition und Subtraktion von Brüchen	171
2.3.3.3	Multiplikation und Division von Brüchen	173
2.3.3.4	Doppelbrüche	175

2.4	Potenzrechnung	193
2.4.1	Begriffserklärungen	193
2.4.2	Potenzgesetze	197
2.4.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	197
2.4.2.2	Multiplikation von Potenzen	197
2.4.2.3	Division von Potenzen	198
2.4.2.4	Potenzieren einer Potenz	200
2.4.2.5	Klammergesetze	201
2.4.3	Erste Erweiterung des Potenzbegriffs	203
2.4.4	Potenzen von Binomen	207
2.4.5	Polynomdivision	210
2.4.6	Ausklammern für Fortgeschrittene	215
2.4.7	Anwendungen der Potenzen	217
2.4.7.1	Schreibweise rationaler Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen	217
2.4.7.2	Schreibweise von Maßeinheiten	218
2.4.8	Übersicht der Potenzgesetze	220
2.5	Wurzelrechnung	229
2.5.1	Radizieren als erste Umkehrung des Potenzierens	229
2.5.1.1	Der Wurzelbegriff	229
2.5.1.2	Definitionsbereich und einschränkende Bedingungen	233
2.5.1.3	Die Berechnung von Wurzelwerten	235
2.5.2	Die reellen Zahlen	236
2.5.3	Zweite Erweiterung des Potenzbegriffs	239
2.5.4	Wurzelgesetze	241
2.5.4.1	Addition und Subtraktion von Wurzeln	241
2.5.4.2	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	242
2.5.4.3	Teilradizieren	243
2.5.4.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	245
2.5.4.5	Rationalmachen des Nenners	246
2.5.4.6	Radizieren von Potenzen und Wurzeln	249
2.5.4.7	Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten	250
2.5.4.8	Rückblick auf die Potenz- und die Wurzelgesetze	251
2.6	Logarithmenrechnung	259
2.6.1	Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens	259
2.6.1.1	Der Logarithmusbegriff	259
2.6.1.2	Logarithmengesetze	262
2.6.2	Spezielle Logarithmensysteme	265
2.6.2.1	Die dekadischen Logarithmen	265
2.6.2.2	Die natürlichen Logarithmen	267
2.6.2.3	Die dualen Logarithmen	268
2.6.2.4	Weitere Logarithmensysteme	268
2.6.3	Zusammenfassung	270
3	Algebra	277
3.1	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	277
3.1.1	Vorbemerkungen und Begriffserklärungen	277
3.1.1.1	Definitionsbereich	277
3.1.1.2	Gleichungen	280
3.1.1.3	Ungleichungen	283

3.1.2	Umformung von Gleichungen	284
3.1.2.1	Äquivalente Umformung von Gleichungen	284
3.1.2.2	Nichtäquivalente Umformung von Gleichungen	286
3.1.2.3	Elektronische Hilfsmittel beim Lösen von Gleichungen	289
3.1.3	Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen	291
3.1.3.1	Begriffserklärungen	291
3.1.3.2	Einfache lineare Gleichungen	292
3.1.3.3	Nichtlineare Gleichungen auf lineare Gleichungen zurückführen	294
3.1.3.4	Gleichungen mit Parametern	296
3.1.3.5	Gleichungen mit Klammerausdrücken	297
3.1.3.6	Bruchgleichungen	299
3.1.3.7	Wurzelgleichungen	302
3.1.3.8	Gleichungen mit eingeschränktem Definitionsbereich	305
3.1.3.9	Das Umstellen von Formeln	306
3.1.3.10	Anwendungen	307
3.1.3.11	Schlussbemerkungen	314
3.1.4	Das Rechnen mit Ungleichungen	314
3.1.5	Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen	319
3.2	Proportionen	329
3.2.1	Begriffserklärungen	329
3.2.2	Rechengesetze für Proportionen	330
3.2.3	Fortlaufende Proportionen	332
3.2.4	Direkte Proportionalität	333
3.2.5	Indirekte Proportionalität	334
3.2.6	Proportionen als Gleichungen	336
3.3	Prozentrechnung	339
3.3.1	Grundbegriffe	339
3.3.2	Berechnung des Prozentsatzes	340
3.3.3	Berechnung des Prozentwertes	341
3.3.4	Berechnung des Grundwertes	342
3.3.5	Verminderter oder vermehrter Grundwert	343
3.3.6	Promillerechnung	347
3.3.7	Zinsrechnung	348
3.3.8	Zinseszinsrechnung	350
3.4	Lineare Gleichungssysteme	356
3.4.1	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	356
3.4.2	Lösungsverfahren für LGS mit zwei Variablen	358
3.4.2.1	Das Einsetzungsverfahren	358
3.4.2.2	Das Gleichsetzungsverfahren	359
3.4.2.3	Das Additionsverfahren	360
3.4.2.4	Bemerkungen zu den drei Lösungsverfahren	361
3.4.2.5	Die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen	361
3.4.2.6	Schwierigere Gleichungssysteme	364
3.4.3	LGS mit drei und mehr Variablen	368
3.4.3.1	Begriffserklärungen	368
3.4.3.2	Lösungsverfahren für LGS mit drei und mehr Variablen	369
3.4.4	LGS mit elektronischen Hilfsmitteln lösen	377
3.4.4.1	Taschenrechner	377
3.4.4.2	CAS	377

3.5	Quadratische Gleichungen	385
3.5.1	Begriffserklärungen	385
3.5.2	Spezielle Formen der quadratischen Gleichung	388
3.5.2.1	Die reinquadratische Gleichung	388
3.5.2.2	Die gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied	391
3.5.3	Die Normalform der quadratischen Gleichung	392
3.5.3.1	Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen	392
3.5.3.2	Die Lösung der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung	397
3.5.4	Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung	400
3.5.4.1	Die Diskriminante	400
3.5.4.2	Der Wurzelsatz von VIETA	401
3.5.4.3	Die Produktform quadratischer Terme – Faktorisieren für Profis	402
3.5.5	Quadratische oder höhere Ungleichungen	404
3.5.6	Wurzelgleichungen, Teil 2	407
3.5.7	Quadratische Gleichungssysteme	408
3.5.8	Biquadratische Gleichungen	409
3.6	Polynomgleichungen	421
3.6.1	Gleichungen ohne Absolutglied	424
3.6.2	Kubische Gleichungen	425
3.6.2.1	Kubische Gleichungen mit Absolutglied	425
3.6.2.2	Methode des gezielten Ratens	427
3.6.2.3	Der Einfluss des Leitkoeffizienten	430
3.6.3	Höhere Polynomgleichungen	432
3.6.4	Übersicht	434
3.7	Exponentialgleichungen	437
3.7.1	Lösen einer Exponentialgleichung durch Exponentenvergleich	437
3.7.2	Lösen einer Exponentialgleichung durch Logarithmieren	438
3.7.3	Lösen einer Exponentialgleichung durch Substitution	444
3.7.4	Nicht elementar lösbare Exponentialgleichungen	446
3.8	Logarithmische Gleichungen	450
3.8.1	Lösen durch Vergleich der Numeri	450
3.8.2	Lösen durch Exponieren	451
3.8.3	Besondere logarithmische Gleichungen	453
3.8.3.1	Substitutionsmethode	453
3.8.3.2	Lösen durch Basiswechsel	454
3.8.3.3	Lösungsvariable in der Basis	455
3.8.4	Nicht elementar lösbare Logarithmusgleichungen	456
4	Funktionen	459
4.1	Begriffsbestimmungen	459
4.1.1	Der Begriff der Abbildung	459
4.1.2	Der Begriff der Funktion	461
4.2	Arten der Darstellung von Funktionen	464
4.2.1	Darstellung einer Funktion durch die Angabe der geordneten Paare	464
4.2.2	Darstellung einer Funktion durch eine Wertetabelle	465
4.2.3	Darstellung einer Funktion durch Zuordnungsgraphen	465
4.2.4	Darstellung einer Funktion durch wörtliche Formulierung der Zuordnungsvorschrift	466

4.2.5	Darstellung einer Funktion durch mathematische Relationen	467
4.2.6	Darstellung einer Funktion durch eine Kurve	468
4.2.6.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	468
4.2.6.2	Darstellung von Funktionen in Form von Graphen	471
4.2.6.3	Grafische Darstellung von Funktionen, die nicht von vornherein als Kurven gegeben sind	473
4.2.6.4	Zusammenhänge zwischen der Gleichung einer Funktion und der zugehörigen Kurve	477
4.2.6.5	Schnittpunkt zweier Kurven	479
4.3	Wichtige Eigenschaften von Funktionen	483
4.3.1	Monotonie	483
4.3.2	Stetigkeit	484
4.3.3	Gerade Funktionen	485
4.3.4	Ungerade Funktionen	486
4.3.5	Schnittpunkte mit den Achsen	487
4.4	Lineare Funktionen	490
4.4.1	Vorbemerkungen	490
4.4.2	Begriffserklärungen	491
4.4.3	Die Funktion $y = mx$	492
4.4.4	Die Funktion $y = mx + b$	495
4.4.5	Grafische Darstellung der linearen Funktion	498
4.4.6	Grafische Lösung linearer Gleichungen und linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen	499
4.5	Quadratische Funktionen	504
4.5.1	Begriffserklärungen	504
4.5.2	Die quadratische Funktion $y = x^2$	504
4.5.3	Die quadratische Funktion $y = x^2 + q$	506
4.5.4	Die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$	506
4.5.5	Die allgemeine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$	510
4.5.6	Modellieren quadratischer Funktionen	513
4.5.7	Parabel und Gerade	515
4.5.8	Grafische Lösung quadratischer Gleichungen	517
4.6	Potenzfunktionen	522
4.6.1	$y = x^n$ mit ganzzahligem positivem Exponenten	522
4.6.2	Die Potenzfunktion $y = x^0$	525
4.6.3	$y = x^{-n}$ mit ganzzahligem negativem Exponenten	525
4.6.4	$y = x^n$ mit gebrochenem Wert des Exponenten n	528
4.7	Wichtige transzendente Funktionen	529
4.7.1	Die Exponentialfunktionen	529
4.7.2	Die logarithmischen Funktionen	531
5	Planimetrie	535
5.1	Grundbegriffe der Geometrie	535
5.2	Lagebeziehungen zwischen Geraden und Winkeln	538
5.2.1	Parallele Geraden	538
5.2.2	Schnitt zweier Geraden	538
5.2.3	Winkel an Parallelen	539
5.3	Symmetrie	540
5.3.1	Axiale Symmetrie	540

5.3.2	Zentrale Symmetrie	541
5.3.3	Geometrische Grundkonstruktionen	542
5.3.4	Punktmengen	544
5.4	Das Dreieck	546
5.4.1	Allgemeines Dreieck	546
5.4.2	Spezielle Dreiecke	548
5.4.3	Dreieckstransversalen und deren Schnittpunkte	549
5.5	Das Viereck	553
5.5.1	Allgemeines Viereck	553
5.5.2	Spezielle Vierecke	553
5.6	Das Vieleck	556
5.6.1	Unregelmäßiges Vieleck	556
5.6.2	Regelmäßige Vielecke	557
5.7	Kongruenz	557
5.7.1	Was ist Kongruenz?	557
5.7.2	Kongruenz von Dreiecken	558
5.8	Ähnlichkeit	561
5.8.1	Ähnlichkeit im Allgemeinen	561
5.8.2	Ähnlichkeit von Dreiecken	561
5.8.3	Strahlensätze	563
5.9	Das rechtwinklige Dreieck	569
5.10	Strecken und Winkel am Kreis	578
5.10.1	Kreis und Gerade	578
5.10.2	Winkel am Kreis	581
5.10.3	Ähnlichkeit am Kreis	583
5.10.4	Der Goldene Schnitt	585
5.11	Berechnung von Flächen und Umfängen	589
5.11.1	Vierecke	589
5.11.2	Dreiecke	591
5.11.3	Unregelmäßige Vielecke	592
5.11.4	Regelmäßige Vielecke	593
5.11.5	Kreis und Kreisteile	595
5.11.6	Umfang und Flächeninhalt ähnlicher Flächen	600
6	Goniometrie	619
6.1	Das Bogenmaß	619
6.2	Winkelfunktionen	621
6.2.1	Definition der Winkelfunktionen	621
6.2.2	Kurvenbilder der Winkelfunktionen	624
6.2.3	Die Zahlenwerte der Winkelfunktionen	628
6.2.4	Die Umkehrung der Winkelfunktionen	631
6.2.5	Elementare Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen	635
6.3	Trigonometrie	638
6.3.1	Die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	639
6.3.2	Sätze über beliebige Dreiecke	645
6.3.2.1	Der Sinussatz	645
6.3.2.2	Die Flächenformel für Dreiecke	647
6.3.2.3	Der Kosinussatz	647
6.3.3	Die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke	648

6.4	Additionstheoreme	656
6.5	Goniometrische Gleichungen	661
7	Stereometrie	667
7.1	Einteilung der Körper	667
7.1.1	Ebenflächner	667
7.1.2	Krummflächner	670
7.2	Darstellung von Körpern	674
7.2.1	Mehrtafelprojektion	674
7.2.2	Axonometrische Projektion	675
7.2.2.1	Isometrische Projektion	675
7.2.2.2	Dimetrische Projektion	677
7.3	Körperberechnung	678
7.3.1	Berechnungsgrundlagen	678
7.3.2	Ebenflächner	678
7.3.2.1	Quader und Würfel	678
7.3.2.2	Gerades Prisma	683
7.3.2.3	Satz des CAVALIERI	687
7.3.2.4	Pyramide	689
7.3.2.5	Pyramidenstumpf	693
7.3.3	Krummflächner	697
7.3.3.1	Kreiszylinder	697
7.3.3.2	Kegel	706
7.3.3.3	Kegelstumpf	710
7.3.3.4	Kugel und Kugelteile	716
7.3.4	Die GULDIN'schen Regeln	734
	Anhang – Mathematische Zeichen	743
	Anhang – Mathematische Begriffe	751
	Lösungen	783
	Sachwortverzeichnis	885