

# Inhalt

## Vorwort — XI

- 1 Erzeugung von Zufallszahlen und Monte-Carlo-Experimente — 1**
- 1.1 MID-Square-Methode von John von Neumann — 1
- 1.2 Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen durch Restklassenoperationen — 5
  - 1.2.1 Restklassenoperationen und die stetige Gleichverteilung — 5
  - 1.2.2 Multiplikativer Generator von Coveyou und MacPherson — 8
  - 1.2.3 Additiver Zufallszahlengenerator (Fibonacci-Generator) — 10
  - 1.2.4 Gemischter Zufallszahlengenerator — 13
  - 1.2.5 Quadratischer Blum-Blum-Shub-Zufallszahlengenerator — 15
  - 1.2.6 RANDU – ein besonders schlechter Zufallszahlengenerator — 16
- 1.3 Zufallszahlengeneration mit Schieberegistern — 19
  - 1.3.1 Allgemeines feedback shift register (GFSR) — 19
  - 1.3.2 Twisted GFSR-Generatoren (TGFSR) — 21
  - 1.3.3 Mersenne-Twister — 24
- 1.4 Erzeugung von Zufallszahlen mit beliebiger Verteilung — 26
  - 1.4.1 Methode der Transformation der Verteilungsfunktion — 26
- 1.5 Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen mit irrationalen Generatoren — 33
  - 1.5.1 Generatoren, die auf einem Satz von Weyl beruhen — 33
  - 1.5.2 Van der Corput-Folgen — 36
  - 1.5.3 Irrationaler Zufallszahlengenerator von Shuhai Li und Yumin Wang — 38
- 1.6 Erzeugung von normal verteilten Zufallszahlen — 40
  - 1.6.1 Methode nach dem großen Grenzwertsatz der Statistik — 41
  - 1.6.2 Polar-Methode von Marsaglia — 42
- 1.7 Monte-Carlo-Methode — 44
  - 1.7.1 Nadelexperiment von Buffon — 44
  - 1.7.2 Experimentelle Berechnung der Zahl Pi — 47
  - 1.7.3 Monte-Carlo-Volumenbestimmung für Kegel, Kugel und Zylinder — 49
  - 1.7.4 Näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen — 51
  - 1.7.5 Bestimmung des Ellipsenumfangs — 55
  - 1.7.6 Verbesserte Monte-Carlo-Berechnung bestimmter Integrale nach Sobol — 58
- 1.8 Zufallszahlenerzeugung im Softwaresystem SAS — 61
  - 1.8.1 RANUNI- und UNIFORM-Funktion in SAS — 61
  - 1.8.2 Erzeugung von Zufallszahlen mit anderen Verteilungen — 61

<b>2</b>	<b>Spielexperimente — 63</b>
2.1	Würfelexperiment mit einem gewöhnlichen Spielwürfel — 63
2.1.1	Gewöhnlicher Spielwürfel — 63
2.1.2	Gezinkter Würfel — 67
2.2	Würfeln mit zwei Würfeln — 69
2.2.1	Augensumme von zwei Würfeln — 69
2.2.2	Maximum und Minimum der Augenzahlen zweier Würfel — 72
2.2.3	Produkt der Augenzahlen zweier Würfel — 74
2.3	Wurfanzahl mit einem gewöhnlichen Spielwürfel, bis erstmals eine 6 fällt — 76
2.4	Wähle dein Glück — 79
2.5	Yahtzee oder Kniffel — 82
2.6	Lotto-Spiel 6 aus 49 — 87
2.7	Klassisches Pokerspiel — 90
2.8	Wie man beim Spiel Schnick-Schnack-Schnuck gewinnt — 93
2.9	Vom Werfen einer Münze zum ARC-SINUS-Gesetz — 98
<b>3</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsfunktionen, Dichten, Verteilungen — 103</b>
3.1	Urnenmodelle — 103
3.1.1	Binomialmodell — 104
3.1.2	Polynomialmodell — 110
3.1.3	Hypergeometrisches Modell — 116
3.2	Erzeugung von normalverteilten Zufallszahlen — 119
3.2.1	Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ — 119
3.2.2	Erzeugung von zweidimensional normalverteilten Zufallszahlen mit vorgegebenem Erwartungswertvektor und vorgegebener Kovarianzstruktur — 122
3.3	Prüfverteilungen — 130
3.3.1	$\chi^2$ -Verteilung — 130
3.3.2	t-Verteilung — 134
3.3.3	F-Verteilung — 136
3.3.4	Kolmogorov-Smirnov-Verteilung — 139
3.4	Wichtige Verteilungen — 143
3.4.1	Poisson-Verteilung („Verteilung der seltenen Ereignisse“) — 143
3.4.2	Cauchy-Verteilung — 149
3.4.3	Betaverteilung — 151
3.4.4	Pareto-Verteilung — 155
3.4.5	Gammaverteilung — 158
3.4.6	Weibull-Verteilung — 162
3.4.7	Laplace-Verteilung — 164
3.4.8	Maxwell-Verteilung — 166
3.4.9	Inverse Gauß-Verteilung oder Wald-Verteilung — 167

- 3.4.10 Erlang-Verteilung — 171
- 3.4.11 Logistische Verteilung — 173
- 3.4.12 Wichtige in SAS verfügbare Verteilungen — 176
  
- 4 Punktschätzungen — 179**
  - 4.1 Stichprobe und Stichprobenfunktion — 179
  - 4.2 Momentenmethode als Punktschätzung für Verteilungsparameter — 180
    - 4.2.1 Einführung der Momentenmethode an einem Beispiel — 180
    - 4.2.2 Genauigkeit der Schätzwerte und Verteilung der Schätzungen — 183
    - 4.2.3 Weitere Beispiele für Momentenschätzungen — 186
  - 4.3 Maximum-Likelihood-Schätzungen — 187
    - 4.3.1 Einführungsbeispiel für eine diskrete Zufallsgröße — 187
    - 4.3.2 Einführungsbeispiel für eine stetige Zufallsgröße — 188
    - 4.3.3 Erwartungstreue und asymptotische Erwartungstreue von Punktschätzungen — 189
    - 4.3.4 Varianz und asymptotische Minimalvarianz von MLH-Punktschätzungen — 193
  - 4.4 EM-Algorithmus zur Schätzung von Allelfrequenzen — 196
    - 4.4.1 Einleitung — 196
    - 4.4.2 Herleitung des EM-Algorithmus für das ABO-Blutgruppensystem — 197
    - 4.4.3 EM-Algorithmus für 2-Allelen-Systeme — 201
  - 4.5 Sequenzielle Schätzung — 204
    - 4.5.1 Sequenzielle Schätzung des Binomialparameters  $p$  und ihre Eigenschaften — 204
    - 4.5.2 Erwartungswert und Varianz des zufälligen Stichprobenumfangs — 206
    - 4.5.3 Schätzungen für den Verteilungsparameter  $p$  der Binomialverteilung — 208
  - 4.6 Sequenzielle MLH-Schätzung für Allelfrequenzen — 216
    - 4.6.1 Allelfrequenzschätzungen, wenn Allel B über A dominiert — 216
    - 4.6.2 Konfidenzintervalle für  $p = P(A)$ , wenn Allel B über A dominiert — 222
    - 4.6.3 Sequenzielle Allelfrequenzschätzungen, wenn Allel A über B dominiert — 223
    - 4.6.4 Konfidenzschätzungen für  $p = P(A)$ , wenn Allel A über B dominiert — 225
  - 4.7 Andere Verfahren zur Parameterbestimmung — 226
    - 4.7.1 Methode der kleinsten Quadrate (MKQ oder MLS) — 226
    - 4.7.2 Minimum- $\chi^2$ -Methode (MCHIQ) — 227

- 5 Konfidenzschätzungen — 229**
  - 5.1 Konfidenzintervalle für den Parameter  $\mu$  der  $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilungen — **229**
    - 5.1.1 Konfidenzintervalle für  $\mu$  bei bekannter Varianz  $\sigma^2$  — **229**
    - 5.1.2 Konfidenzintervalle für  $\mu$  bei unbekannter und geschätzter Varianz  $s^2$  — **230**
  - 5.2 Konfidenzschätzung für den Median — **231**
  - 5.3 Konfidenzintervalle für die Differenzen von Medianen — **234**
    - 5.3.1 Ungepaarter Fall — **234**
    - 5.3.2 Gepaarter Fall — **235**
  - 5.4 Konfidenzintervall für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung — **236**
    - 5.4.1 Asymptotische Konfidenzintervalle für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung — **236**
    - 5.4.2 Exaktes Konfidenzintervall für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung — **239**
    - 5.4.3 Bewertung dreier Konfidenzintervalle für den Parameter  $p$  einer Binomialverteilung  $B(n, p)$  — **240**
    - 5.4.4 Zusammenfassung und Empfehlung — **241**
  - 5.5 Konfidenzintervalle für epidemiologische Risikomaße — **242**
    - 5.5.1 Konfidenzintervalle für die Risikodifferenz  $RD$  — **244**
    - 5.5.2 Konfidenzintervall für das relative Risiko  $RR$  — **247**
    - 5.5.3 Konfidenzintervalle für den Chancenquotienten  $OR$  — **249**
  - 5.6 Konfidenzschätzung für eine Verteilungsfunktion — **261**
  - 5.7 Transformation von Konfidenzgrenzen — **264**
  
- 6 Statistische Tests — 267**
  - 6.1 Prinzip eines statistischen Tests — **267**
  - 6.2 Einstichprobentests — **268**
    - 6.2.1 Einstichprobentest für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung — **268**
    - 6.2.2 Einstichprobentest für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsgröße — **269**
    - 6.2.3 Einstichproben-Trendtest nach Mann — **270**
  - 6.3 Simulation einer Prüfgröße, dargestellt für den David-Test — **272**
    - 6.3.1 Zielstellung — **272**
    - 6.3.2 Einleitung — **273**
    - 6.3.3 Theoretische Beschreibung — **274**
    - 6.3.4 Simulationsexperiment — **276**
    - 6.3.5 Ergebnisse — **277**
  - 6.4 Zweistichprobentests für zentrale Tendenzen — **281**
    - 6.4.1 Tests für verbundene Stichproben — **281**
    - 6.4.2 Tests für unverbundene Stichproben — **291**
  - 6.5 Tests zur Untersuchung der Gleichheit von Varianzen — **304**

- 6.5.1 Parametrischer F-Test, ein Test auf Gleichheit zweier Varianzen — **304**
- 6.5.2 Hartley-Test und Cochran-Test — **308**
- 6.5.3 Levene-Test — **312**
- 6.5.4 Rangtest nach Ansari-Bradley-Freund für zwei Varianzen — **318**
- 6.5.5 Rangtest nach Siegel und Tukey — **320**
- 6.5.6 Bartlett-Test auf Gleichheit der Varianzen — **323**
- 6.6 Tests für mehr als zwei Stichproben — **325**
- 6.6.1 Friedman-Test bei mehr als zwei verbundenen Stichproben — **325**
- 6.6.2 Nemenyi-Test — **329**
- 6.6.3 Page-Test — **332**
- 6.6.4 Kruskal-Wallis-Test für unabhängige Stichproben — **335**
- 6.7  $\chi^2$ -Test für kategoriale Daten — **338**
- 6.7.1  $\chi^2$ -Test als Anpassungstest — **339**
- 6.7.2  $\chi^2$ -Test als Median- oder Median-Quartile-Test — **341**
- 6.7.3  $\chi^2$ -Test als Unabhängigkeitstest — **344**
- 6.7.4  $\chi^2$ -Test als Symmetrietest von Bowker für abhängige Stichproben — **346**
- 6.7.5 Exakter Test von Fisher und der Barnard-Test — **349**
- 6.8 Anpassungstests (Goodness of fit tests) — **354**
- 6.8.1 Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest — **354**
- 6.8.2 Lilliefors-Test — **358**
- 6.8.3 Kuiper-Test — **360**
- 6.8.4 Anderson-Darling-Test — **361**
- 6.8.5 Cramér-von-Mises-Test — **362**
- 6.8.6 Jarque-Bera-Test — **363**
- 6.8.7 D'Agostino-K<sup>2</sup>-Test — **365**
- 6.9 Schnelltests (Quick Tests of Location) — **369**
- 6.9.1 Schnelltest nach Tukey und Rosenbaum — **369**
- 6.9.2 Schnelltest nach Neave — **373**
- 6.9.3 Wilks-Rosenbaum-Test — **376**
- 6.9.4 Kamat-Test — **381**
- 6.10 Ausreißertests — **386**
- 6.10.1 Einleitung — **386**
- 6.10.2 Einfache Grundregeln, Boxplotmethoden — **388**
- 6.10.3 Ausreißerererkennung nach Peirce — **392**
- 6.10.4 Maximum-Methode — **396**
- 6.10.5 Modifizierte Z-Scores — **398**
- 6.10.6 Ausreißertest von Dean-Dixon — **400**
- 6.10.7 David-Hartley-Pearson-Test — **401**
- 6.10.8 Grubbs-Test — **404**
- 6.10.9 Grubbs-Beck-Test — **406**
- 6.10.10 Test auf mehrere Ausreißer von Tietjen und Moore — **408**

- 6.10.11 Parameterfreier Ausreißertest nach Walsh — **413**
- 6.10.12 Modifiziertes Thompson-t-Verfahren — **414**
- 6.10.13 Wertung der Testmethoden zur Ausreißerererkennung mittels Powerbestimmung — **418**
- 6.11 Sequenzielle statistische Tests — **419**
- 6.11.1 Prinzip von Sequenzialtests — **419**
- 6.11.2 Sequenzieller t-Test — **420**
- 6.11.3 Sequenzieller Test für das odds ratio OR — **430**

**7 Funktionstests für Zufallszahlengeneratoren — 437**

- 7.1 Zwei  $\chi^2$ -Anpassungstests — **437**
- 7.1.1 Einfacher  $\chi^2$ -Anpassungstest — **437**
- 7.1.2 Paartest — **438**
- 7.2 Kolmogorov-Smirnov-Test — **439**
- 7.3 Permutationstest — **440**
- 7.4 Run-Tests — **441**
- 7.4.1 Run-Test nach Knuth — **444**
- 7.4.2 Zweiter Run-Test — **450**
- 7.4.3 Bedingter Run-Test nach Wald und Wolfowitz — **451**
- 7.5 Gap-Test — **457**
- 7.6 Poker-Test — **460**
- 7.7 Coupon Collectors Test — **463**
- 7.8 Geburtstagstest — **466**
- 7.9 Maximumtest — **468**
- 7.10 Count-The-1's-Test und Monkey-Test — **471**
- 7.11 Binärer Matrix-Rang-Test — **473**
- 7.12 Kubustest — **476**
- 7.13 Autokorrelation — **477**

**Literatur — 481**

**Stichwortverzeichnis — 489**