

Inhalt

I. Das Stieltjessche Integral

1. Mengen und ihre Mächtigkeit	15
2. Das Stieltjessche Integral und seine Haupteigenschaften	17
3. Darboux'sche Summen	21
4. Das Stieltjessche Integral einer stetigen Funktion	24
5. Das uneigentliche Stieltjessche Integral	27
6. Die Sprungfunktion	29
7. Physikalische Interpretation	32
8. Funktionen von beschränkter Variation	33
9. Integrierbare Funktionen von beschränkter Variation	38
10. Existenz des Stieltjesschen Integrals	39
11. Grenzübergang unter dem Stieltjesschen Integral	40
12. Satz von HELLY	42
13. Das Auswahlprinzip	45
14. Der Raum der stetigen Funktionen	46
15. Die allgemeine Form der Funktionale in C	48
16. Lineare Operatoren in C	52
17. Intervallfunktionen	53
18. Das allgemeine Stieltjessche Integral	55
19. Eigenschaften des (allgemeinen) Stieltjesschen Integrals	57
20. Existenz des allgemeinen Stieltjesschen Integrals	60
21. Intervallfunktionen in der Ebene	62
22. Übergang zur Punktfunktion	65
23. Das Stieltjessche Integral in der Ebene	67
24. Funktionen von beschränkter Variation in der Ebene	68
25. Der Raum der stetigen Funktionen mehrerer Veränderlicher	71
26. Das Fourier-Stieltjessche Integral	71
27. Die Umkehrformel	74
28. Der Faltungssatz	76
29. Das Cauchy-Stieltjessche Integral	78

II. Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral

§ 1. Mengenfunktionen und Maßtheorie	82
30. Mengenoperationen	82
31. Punktmengen	85
32. Eigenschaften abgeschlossener und offener Mengen	86
33. Elementarbereiche	89
34. Das äußere Maß und seine Eigenschaften	92
35. Meßbare Mengen	94
36. Meßbare Mengen (Fortsetzung)	101

37. Meßbarkeitskriterien	102
38. Mengenkörper	104
39. Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems	106
40. Der Körper B	107
41. Der Fall einer Veränderlichen	108
§ 2. Meßbare Funktionen	109
42. Die Definition der meßbaren Funktionen	109
43. Eigenschaften der meßbaren Funktionen	112
44. Der Grenzwert meßbarer Funktionen	113
45. Die Eigenschaft C	117
46. Stückweise konstante Funktionen	117
47. Die Baireschen Klassen	119
§ 3. Das Lebesguesche Integral	120
48. Das Integral beschränkter Funktionen	120
49. Eigenschaften des Integrals	123
50. Das Integral von unbeschränkten nichtnegativen Funktionen	126
51. Eigenschaften des Integrals	129
52. Funktionen beliebigen Vorzeichens	131
53. Komplexe summierbare Funktionen	135
54. Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen	136
55. Die Klasse L_2	139
56. Konvergenz im Mittel	141
57. Der Hilbertsche Funktionenraum	144
58. Orthogonale Funktionensysteme	146
59. Der Raum l_2	150
60. Lineare Mannigfaltigkeiten in L_2	152
61. Beispiele für vollständige Systeme	155
62. Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung	156
63. Das Integral über eine Menge unendlichen Maßes	160
64. Die Klasse L_2 auf einer Menge unendlichen Maßes	164
65. Integrierbare Funktionen von beschränkter Variation	166
66. Die Reduktion mehrfacher Integrale	168
67. Der Fall einer charakteristischen Funktion	170
68. Der Satz von FUBINI	173
69. Das Vertauschen der Reihenfolge der Integration	176
70. Die Stetigkeit im Mittel	177
71. Mittelfunktionen	179

III. Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs

72. Additive Mengenfunktionen	185
73. Die singuläre Funktion	188
74. Der Fall einer Veränderlichen	190
75. Absolut stetige Mengenfunktionen	194
76. Beispiel	199
77. Absolut stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher	201
78. Hilfssätze	203
79. Hilfssätze (Fortsetzung)	207
80. Hauptsatz	211

81. Das Hellingersche Integral.	214
82. Der Fall einer Veränderlichen	217
83. Eigenschaften des Hellingerschen Integrals	220

IV. Metrische und normierte Räume

84. Der metrische Raum	224
85. Vervollständigung eines metrischen Raumes	226
86. Operatoren und Funktionale. Das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen	230
87. Beispiele	231
88. Beispiele für die Anwendung des Prinzips der kontrahierenden Abbildungen	234
89. Kompaktheit	236
90. Kompaktheit im Raum C	238
91. Kompaktheit im Raum L_p	238
92. Kompaktheit im Raum l_p	241
93. Funktionale auf in sich kompakten Mengen	242
94. Separabilität.	243
95. Lineare normierte Räume	245
96. Beispiele für normierte Räume	248
97. Operatoren in normierten Räumen	248
98. Lineare Funktionale	251
99. Konjugierte Räume.	254
100. Schwache Konvergenz von Funktionalen	257
101. Schwache Konvergenz von Elementen	259
102. Lineare Funktionale in den Räumen C , L_p und l_p	262
103. Schwache Konvergenz in den Räumen C , L_p und l_p	268
104. Der Raum der linearen Operatoren und die Konvergenz von Operatorfolgen	269
105. Adjungierte Operatoren	271
106. Vollstetige Operatoren	271
107. Operatorengleichungen	272
108. Vollstetige Operatoren in den Räumen C , L_p und l_p	274
109. Verallgemeinerte Ableitungen	277
110. Verallgemeinerte Ableitungen (Fortsetzung)	281
111. Sternförmige Gebiete	283
112. Die Räume $\bar{W}_p^{(l)}$ und $W_p^{(l)}$	284
113. Eigenschaften der Funktionen aus der Klasse $W_p^{(l)}(D)$	286
114. Einbettungssätze	292
115. Integraloperatoren mit polaren Kernen	295
116. Sobolewsche Integraldarstellungen	300
117. Einbettungssätze	304
118. Gebiete allgemeinerer Art	306
119. Der Raum $\hat{C}^{(l)}(D)$	307

V. Der Hilbertsche Raum

§ 1. Die Theorie der beschränkten Operatoren	317
120. Die Axiome des Raumes	317
121. Orthogonalität und Orthogonalsysteme von Elementen	319
122. Die Projektion	322

123. Lineare Funktionale	324
124. Lineare Operatoren	326
125. Bilineare und quadratische Funktionale	329
126. Die Grenzen eines selbstadjungierten Operators	330
127. Der inverse Operator	332
128. Das Spektrum eines Operators	335
129. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators.	337
130. Die Resolvente	341
131. Folgen von Operatoren	341
132. Schwache Konvergenz	342
133. Vollstetige Operatoren	344
134. Die Räume H und l_2	346
135. Lineare Gleichungen mit vollstetigen Operatoren	348
136. Vollstetige selbstadjungierte Operatoren	352
137. Unitäre Operatoren	356
138. Die absolute Norm eines Operators	359
139. Operatoren über Unterräumen	361
140. Projektionsoperatoren.	362
141. Zerlegung der Einheit. Das Stieltjessche Integral	366
142. Die Spektralschar eines selbstadjungierten Operators	371
143. Stetige Funktionen eines selbstadjungierten Operators	372
144. Eine Formel für die Resolvente. Die Charakterisierung der regulären Werte von λ	375
145. Eigenwerte und Eigenelemente	377
146. Das reine Punktspektrum	378
147. Das einfache kontinuierliche Spektrum	379
148. Invariante Unterräume	384
149. Der allgemeine Fall eines kontinuierlichen Spektrums	386
150. Das gemischte Spektrum	388
151. Differentiallösungen	389
152. Die Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen	392
153. Unitär äquivalente selbstadjungierte Operatoren	394
154. Die Spektralzerlegung unitärer Operatoren	395
155. Funktionen eines selbstadjungierten Operators	395
156. Vertauschbare Operatoren	399
157. Störung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators	400
158. Normale Operatoren	402
159. Hilfssätze	404
160. Die Potenzreihe eines Operators	407
161. Die Spektralschar.	408
§ 2. Die Räume l_2 und L_2	411
162. Lineare Operatoren im Raum l_2	411
163. Beschränkte Operatoren	412
164. Unitäre Matrizen und Projektionsmatrizen.	416
165. Selbstadjungierte Matrizen	417
166. Das kontinuierliche Spektrum	419
167. Jacobische Matrizen	423
168. Differentiallösungen	425
169. Beispiele	427
170. Schwache Konvergenz im Raum l_2	430
171. Vollstetige Operatoren im Raum l_2	430
172. Integraloperatoren im Raum L_2	431
173. Der adjungierte Operator	432
174. Vollstetige Operatoren	434

175. Die Spektralschar	435
176. Die Spektralschar (Fortsetzung)	436
177. Unitäre Transformationen im Raum L_2	438
178. Fouriertransformationen	440
179. Fouriertransformation und Hermitesche Funktionen	443
180. Die Operation der Multiplikation	444
181. Differenzkerne	446
182. Schwache Konvergenz	450
183. Andere Realisierungen des Raumes H	450
§ 3. Nichtbeschränkte Operatoren	451
184. Abgeschlossene Operatoren	451
185. Der adjungierte Operator	453
186. Der Graph eines Operators	455
187. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren	457
188. Beispiele für nichtbeschränkte Operatoren	459
189. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators.	468
190. Das Punktspektrum	471
191. Invariante Unterräume und Reduzibilität eines Operators	472
192. Zerlegung der Einheit. Das Stieltjessesches Integral	475
193. Stetige Funktionen eines selbstadjungierten Operators	480
194. Die Resolvente	481
195. Eigenwerte	483
196. Das gemischte Spektrum	483
197. Funktionen eines selbstadjungierten Operators	485
198. Kleine Störungen des Spektrums	487
199. Der Operator der Multiplikation	489
200. Integraloperatoren	492
201. Erweiterung eines abgeschlossenen symmetrischen Operators	495
202. Defektindizes	498
203. Der adjungierte Operator	501
204. Maximale Operatoren	503
205. Erweiterung symmetrischer halbbeschränkter Operatoren	504
206. Vergleich halbbeschränkter Operatoren	508
207. Beispiele aus der Theorie der Erweiterungen	510
208. Das Spektrum eines symmetrischen Operators	512
209. Einige Sätze über Erweiterungen und ihre Spektren	514
210. Die Unabhängigkeit der Defektindizes von λ	516
211. Über die Invarianz des kontinuierlichen Teils des Kerns bei symmetri- schen Erweiterungen	518
212. Über die Spektren selbstadjungierter Erweiterungen	518
213. Beispiele	519
214. Unendliche Matrizen	520
215. Jacobische Matrizen	522
216. Matrizen und Operatoren	526
217. Unitäre Äquivalenz von C -Matrizen.	528
218. Die Existenz einer Spektralschar	530
Literaturhinweise	534
Namen- und Sachverzeichnis	540