

# Inhalt

<b>Inhalt</b>	<b>v</b>
<b>Vorwort</b>	<b>XVII</b>
<b>Teil A: Anwendungen</b>	<b>1</b>
<b>I Grundmodell</b>	<b>3</b>
1 Priorianalyse . . . . .	3
2 Posteriorianalyse . . . . .	7
3 Präposteriorianalyse . . . . .	12
3.1 Für fixes $n$ . . . . .	12
3.2 Für variables $n$ . . . . .	21
4 Fallstudie . . . . .	24
<b>II Anteilswert <math>\pi</math></b>	<b>29</b>
1 Testverfahren . . . . .	29
1.1 Konstante Schadenfunktion . . . . .	29
(a) Priorianalyse . . . . .	29
(b) Posteriorianalyse . . . . .	31
(c) Präposteriorianalyse . . . . .	32
( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	32
( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	36
(d) Fallstudie . . . . .	37
1.2 Lineare Schadenfunktion . . . . .	42
(a) Priorianalyse . . . . .	42
(b) Posteriorianalyse . . . . .	45
(c) Präposteriorianalyse . . . . .	45
( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	45

		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	48
	(d)	Fallstudie . . . . .	49
1.3		Quadratische Schadenfunktion . . . . .	54
	(a)	Priorianalyse . . . . .	54
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	55
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	56
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	56
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	57
	(d)	Fallstudie . . . . .	58
2		Punktschätzverfahren . . . . .	61
2.1		Konstante Schadenfunktion . . . . .	61
	(a)	Priorianalyse . . . . .	61
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	63
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	64
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	64
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	65
	(d)	Fallstudie . . . . .	65
2.2		Lineare Schadenfunktion . . . . .	68
	(a)	Priorianalyse . . . . .	68
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	69
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	70
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	70
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	71
	(d)	Fallstudie . . . . .	72
2.3		Quadratische Schadenfunktion . . . . .	75
	(a)	Priorianalyse . . . . .	75
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	77
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	77
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	77
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	79
	(d)	Fallstudie . . . . .	81
3		Intervallschätzverfahren . . . . .	82
3.1		Konstante Schadenfunktion . . . . .	82
	(a)	Priorianalyse . . . . .	82
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	83
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	84

	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	84
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	85
	(d)	Fallstudie . . . . .	86
3.2		Lineare Schadenfunktion . . . . .	88
	(a)	Priorianalyse . . . . .	88
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	89
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	90
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	90
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	90
	(d)	Fallstudie . . . . .	91
3.3		Quadratische Schadenfunktion . . . . .	93
	(a)	Priorianalyse . . . . .	93
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	94
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	94
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	94
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	95
	(d)	Fallstudie . . . . .	96

### III Mittelwert $\mu$ 99

1		Testverfahren . . . . .	99
	1.1	Konstante Schadenfunktion . . . . .	99
		(a) Priorianalyse . . . . .	99
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	101
		(c) Präposteriorianalyse . . . . .	103
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	103
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	105
	(d)	Fallstudie . . . . .	107
	1.2	Lineare Schadenfunktion . . . . .	111
		(a) Priorianalyse . . . . .	111
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	112
		(c) Präposteriorianalyse . . . . .	113
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	113
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	114
	(d)	Fallstudie . . . . .	116
	1.3	Quadratische Schadenfunktion . . . . .	122
		(a) Priorianalyse . . . . .	122
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	123

	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	124
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	124
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	125
	(d)	Fallstudie . . . . .	126
<b>2</b>		<b>Punktschätzverfahren . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>2.1</b>		<b>Konstante Schadenfunktion . . . . .</b>	<b>130</b>
	(a)	Priorianalyse . . . . .	130
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	132
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	133
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	133
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	133
	(d)	Fallstudie . . . . .	134
<b>2.2</b>		<b>Lineare Schadenfunktion . . . . .</b>	<b>137</b>
	(a)	Priorianalyse . . . . .	137
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	138
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	138
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	138
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	139
	(d)	Fallstudie . . . . .	139
<b>2.3</b>		<b>Quadratische Schadenfunktion . . . . .</b>	<b>142</b>
	(a)	Priorianalyse . . . . .	142
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	143
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	143
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	143
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	144
	(d)	Fallstudie . . . . .	144
<b>3</b>		<b>Intervallschätzverfahren . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>3.1</b>		<b>Konstante Schadenfunktion . . . . .</b>	<b>147</b>
	(a)	Priorianalyse . . . . .	147
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	148
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	149
	( $\alpha$ )	Für fixes $n$ . . . . .	149
	( $\beta$ )	Für variables $n$ . . . . .	149
	(d)	Fallstudie . . . . .	150
<b>3.2</b>		<b>Lineare Schadenfunktion . . . . .</b>	<b>153</b>
	(a)	Priorianalyse . . . . .	153

	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	154
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	155
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	155
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	155
	(d)	Fallstudie . . . . .	156
3.3		Quadratische Schadenfunktion . . . . .	159
	(a)	Priorianalyse . . . . .	159
	(b)	Posteriorianalyse . . . . .	160
	(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	161
		( $\alpha$ ) Für fixes $n$ . . . . .	161
		( $\beta$ ) Für variables $n$ . . . . .	161
	(d)	Fallstudie . . . . .	162

#### IV Differenz $\delta$ 167

1		Differenz $\delta_\mu = \mu_1 - \mu_2$ für unabhängige Stichproben . . . . .	167
	1.1	Testverfahren für eine konstante Schadenfunktion . . . . .	167
		(a) Priorianalyse . . . . .	167
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	170
		(c) Präposteriorianalyse . . . . .	173
		( $\alpha$ ) Für fixes $n_1$ und $n_2$ . . . . .	173
		( $\beta$ ) Für variables $n_1$ und $n_2$ . . . . .	175
	(d)	Fallstudie . . . . .	175
	1.2	Testverfahren für eine lineare Schadenfunktion . . . . .	179
		(a) Priorianalyse . . . . .	179
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	182
		(c) Präposteriorianalyse . . . . .	183
		( $\alpha$ ) Für fixes $n_1$ und $n_2$ . . . . .	183
		( $\beta$ ) Für variables $n_1$ und $n_2$ . . . . .	184
	(d)	Fallstudie . . . . .	185
	1.3	Punktschätzverfahren für eine lineare Schadenfunktion . . . . .	188
		(a) Priorianalyse . . . . .	188
		(b) Posteriorianalyse . . . . .	190
		(c) Präposteriorianalyse . . . . .	190
		( $\alpha$ ) Für fixes $n_1$ und $n_2$ . . . . .	190
		( $\beta$ ) Für variables $n_1$ und $n_2$ . . . . .	191
	(d)	Fallstudie . . . . .	192

1.4	Intervallschätzverfahren für eine quadratische Schadenfunktion . . . . .	195
(a)	Priorianalyse . . . . .	195
(b)	Posteriorianalyse . . . . .	196
(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	197
(α)	Für fixes $n_1$ und $n_2$ . . . . .	197
(β)	Für variables $n_1$ und $n_2$ . . . . .	197
(d)	Fallstudie . . . . .	199
2	Differenz $\delta_\mu = \mu_1 - \mu_2$ für abhängige Stichproben . . . . .	202
(a)	Priorianalyse . . . . .	203
(b)	Posteriorianalyse . . . . .	204
(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	206
(α)	Für fixes $n_1$ . . . . .	206
(β)	Für variables $n_1$ . . . . .	207
(d)	Fallstudie . . . . .	208
3	Differenz $\delta_\pi = \pi_1 - \pi_2$ für unabhängige Stichproben . . . . .	211
(a)	Priorianalyse . . . . .	212
(b)	Posteriorianalyse . . . . .	213
(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	214
(α)	Für fixes $n_1$ und $n_2$ . . . . .	214
(β)	Für variables $n_1$ und $n_2$ . . . . .	214
(d)	Fallstudie . . . . .	215
<b>V Regressionskoeffizient <math>\beta</math></b>		<b>219</b>
1	Testverfahren für $\beta$ und eine konstante Schadenfunktion . . . . .	222
(a)	Priorianalyse . . . . .	222
(b)	Posteriorianalyse . . . . .	223
(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	225
(α)	Für fixes $n$ . . . . .	225
(β)	Für variables $n$ . . . . .	226
(d)	Fallstudie . . . . .	227
2	Punktschätzverfahren für $Y_{n+1}$ und eine lineare Schadenfunktion	231
(a)	Priorianalyse . . . . .	231
(b)	Posteriorianalyse . . . . .	232
(c)	Präposteriorianalyse . . . . .	233
(α)	Für fixes $n$ . . . . .	233
(β)	Für variables $n$ . . . . .	234

(d) Fallstudie . . . . . 234

**Teil B: Theorie** **239**

**I Verteilungstheorie** **241**

1 Eindimensionale Verteilung . . . . . 241

    1.1 Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktion . . . . . 241

    1.2 Verteilungsfunktion . . . . . 244

    1.3 Erwartungswert und Varianz . . . . . 247

    1.4 Perzentile . . . . . 248

    1.5 Modus . . . . . 249

    1.6 Erwartungswert der Funktion einer Zufallsvariablen . . . . . 249

    1.7 Momente . . . . . 250

    1.8 Momenterzeugende Funktion . . . . . 251

    1.9 Partielle Momente . . . . . 254

        (a) Partielle Erwartungswerte . . . . . 254

        (b) Konstante, lineare und quadratische partielle Momente . . . . . 256

    1.10 Momenterzeugende Funktion für partielle Momente . . . . . 259

2 Zweidimensionale Verteilungen . . . . . 262

    2.1 Gemeinsame Verteilung . . . . . 262

    2.2 Randverteilungen . . . . . 265

    2.3 Bedingte Verteilungen . . . . . 268

    2.4 Bayes Theorem . . . . . 269

    2.5 Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianz . . . . . 271

    2.6 Erwartungswert einer von zwei gemeinsam verteilten Zufallsvariablen . . . . . 277

    2.7 Varianz einer von zwei gemeinsam verteilten Zufallsvariablen . . . . . 279

    2.8 Momente . . . . . 280

    2.9 Momenterzeugende Funktionen . . . . . 281

    2.10 Partielle Momente . . . . . 283

    2.11 Momenterzeugende Funktion für die partiellen Momente . . . . . 285

3 Verteilungen des Bernoulli Modells . . . . . 286

    3.1 Binomialverteilung . . . . . 287

        (a) Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion . . . . . 287

        (b) Momenterzeugende Funktion . . . . . 289

	(c)	Momenterzeugende Funktion für partielle Mo- mente . . . . .	290
3.2		Betaverteilung . . . . .	291
	(a)	Dichte- und Verteilungsfunktion . . . . .	291
	(b)	Momenterzeugende Funktion . . . . .	294
	(c)	Momenterzeugende Funktion für partielle Mo- mente . . . . .	295
3.3		Betabinomialverteilung von $X$ . . . . .	297
	(a)	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion . . . . .	297
	(b)	Momenterzeugende Funktion . . . . .	299
	(c)	Momenterzeugende Funktion für partielle Mo- mente . . . . .	300
3.4		Betabinomialverteilung von $\pi''$ . . . . .	302
	(a)	Wahrscheinlichkeitsfunktion und Momente . . . . .	302
	(b)	Partielle Momente . . . . .	303
3.5		Gemeinsame Betabinomialverteilung von $X$ und $\pi$ . . . . .	307
	(a)	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion . . . . .	307
	(b)	Partielle Momente . . . . .	307
	(c)	Momenterzeugende Funktion . . . . .	309
	(d)	Partielle Erwartungswerte . . . . .	311
	(e)	Lineare Momente . . . . .	312
	(f)	Quadratische Momente . . . . .	314
3.6		Verteilungen von $\pi$ . . . . .	315
4		Verteilungen des Gauß Modells . . . . .	317
	4.1	Normalverteilung . . . . .	317
		(a) Dichte- und Verteilungsfunktion . . . . .	317
		(b) Momenterzeugende Funktion . . . . .	318
		(c) Momenterzeugende Funktion für partielle Mo- mente . . . . .	320
		(d) Lineare und quadratische Momente . . . . .	321
	4.2	Standardnormalverteilung . . . . .	322
		(a) Dichte- und Verteilungsfunktion . . . . .	322
		(b) Beweis der Dichtefunktion . . . . .	323
		(c) Transformation . . . . .	324
		(d) Momenterzeugende Funktionen . . . . .	327
	4.3	Zweidimensionale Normalverteilung . . . . .	327
		(a) Dichtefunktion . . . . .	327

	(b)	Verteilungsfunktion . . . . .	330
	(c)	Matrixschreibweise . . . . .	331
4.4		Standardisierte zweidimensionale Normalverteilungen . .	333
	(a)	Standardisierung mit $\varrho = 0$ . . . . .	333
	(b)	Standardisierung mit $\varrho \neq 0$ . . . . .	335
4.5		Momente der zweidimensionalen Normalverteilung . . . .	336
	(a)	Momenterzeugende Funktion . . . . .	336
	(b)	Kovarianz . . . . .	337
	(c)	Partielle Momente erster Ordnung . . . . .	337
	(d)	Partielle Momente zweiter Ordnung . . . . .	339
	(e)	Numerisches Beispiel . . . . .	341
	(f)	Lineare Momente . . . . .	342
	(g)	Quadratische Momente . . . . .	344
4.6		Verteilungen von $\mu$ . . . . .	344
	(a)	Normalverteilungen des Gauß Modells . . . . .	344
	(b)	Parameter der bivariaten Normalverteilung . . . . .	346
	(c)	Verteilung vom $\mu''$ . . . . .	348
	(d)	Zusammenfassung . . . . .	348
4.7		Verteilungen von $\delta$ . . . . .	349
	(a)	Normalverteilungen des Gauß Modells . . . . .	349
	(b)	Parameter der bivariaten Normalverteilung von ( $\delta_{\bar{x}}, \delta_{\mu}$ ) . . . . .	353
	(c)	Verteilung vom $\delta_{\mu''}$ . . . . .	353
	(d)	Zusammenfassung für $\delta_{\mu}$ . . . . .	354
	(e)	Differenz $\delta_w = w_1 - w_2$ . . . . .	355
	(f)	Differenz $\delta_{\pi} = \pi_1 - \pi_2$ . . . . .	357
4.8		Verteilungen von $\beta$ . . . . .	360
	(a)	Normalverteilungen des Gauß Modells . . . . .	360
	(b)	Parameter der bivariaten Normalverteilung von $\alpha$ und $\beta$ . . . . .	365
	(c)	Verteilung vom $\beta''$ . . . . .	366
	(d)	Zusammenfassung für $\beta$ . . . . .	367

## II Schadenerwartungswerte 369

1	Testverfahren . . . . .	371
1.1	Konstante Schadenfunktion' . . . . .	372
1.2	Lineare Schadenfunktion . . . . .	372

**XIV**

1.3	Quadratische Schadenfunktion . . . . .	373
2	Punktschätzverfahren . . . . .	374
2.1	Konstante Schadenfunktion . . . . .	376
2.2	Lineare Schadenfunktion . . . . .	379
2.3	Quadratische Schadenfunktion . . . . .	381
3	Intervallschätzverfahren . . . . .	384
3.1	Konstante Schadenfunktion . . . . .	386
3.2	Lineare Schadenfunktion . . . . .	388
3.3	Quadratische Schadenfunktion . . . . .	392
<b>III</b>	<b>Erwarteter Wert der Stichprobeninformation</b>	<b>395</b>
1	Testverfahren . . . . .	397
1.1	Bernoulli Modell . . . . .	399
1.2	Gauß Modell . . . . .	400
	(a) Konstante Schadenfunktion . . . . .	401
	(b) Lineare Schadenfunktion . . . . .	402
	(c) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	402
1.3	Lineare Schadenfunktion und $s_1 = s_2$ . . . . .	403
	(a) Bernoulli Modell . . . . .	403
	(b) Gauß Modell . . . . .	404
2	Punktschätzverfahren . . . . .	406
2.1	Bernoulli Modell . . . . .	406
2.2	Gauß Modell für $\mu$ . . . . .	409
	(a) Konstante Schadenfunktion . . . . .	409
	(b) Lineare Schadenfunktion . . . . .	412
	(c) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	417
	(d) Beispiel für den EWSI bei einer gemischten Schadenfunktion . . . . .	419
3	Intervallschätzverfahren . . . . .	420
3.1	Bernoulli Modell . . . . .	420
3.2	Gauß Modell . . . . .	420
	(a) Konstante Schadenfunktion . . . . .	420
	(b) Lineare Schadenfunktion . . . . .	422
	(c) Quadratische Schadenfunktion . . . . .	424
<b>IV</b>	<b>Numerische Approximation für Verteilungen</b>	<b>427</b>
1	Normalverteilung . . . . .	427

1.1	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung . . . .	427
1.2	Inverse Funktion Standardnormalverteilung . . . . .	428
2	Bivariate Normalverteilung . . . . .	429
3	Betaverteilung . . . . .	431
3.1	Verteilungsfunktion . . . . .	431
	(a) Inverse Verteilungsfunktion . . . . .	434
4	Zentrale Grenzwertsätze . . . . .	435
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>439</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>		<b>442</b>