

Table des matières

Chapitre I. Cohomologie des groupes profinis

§ 1. Groupes profinis	2
1.1. Définition	2
1.2. Sous-groupes	3
1.3. Indices	4
1.4. Pro- p -groupes et p -groupes de Sylow	5
1.5. Pro- p -groupes libres	6
§ 2. Cohomologie	8
2.1. Les G -modules discrets	8
2.2. Cochaînes, cocycles, cohomologie	8
2.3. Basses dimensions	9
2.4. Functorialité	10
2.5. Modules induits	11
2.6. Compléments	12
§ 3. Dimension cohomologique	15
3.1. La p -dimension cohomologique	15
3.2. Dimension cohomologique stricte	16
3.3. Dimension cohomologique des sous-groupes et des extensions	17
3.4. Caractérisation des groupes profinis G tels que $\text{cd}_p(G) \leq 1$	19
3.5. Module dualisant	22
§ 4. Cohomologie des pro- p -groupes	25
4.1. Modules simples	25
4.2. Interprétation de H^1 : générateurs	27
4.3. Interprétation de H^2 : relations	30
4.4. Un théorème de Šafarevič	32
4.5. Groupes de Poincaré	35
§ 5. Cohomologie non abélienne	42
5.1. Définition de H^0 et de H^1	42
5.2. Espaces principaux homogènes sur A – nouvelle définition de $H^1(G, A)$	43
5.3. Torsion	44
5.4. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe	47
5.5. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe distingué	49
5.6. Cas d'un sous-groupe abélien distingué	50
5.7. Cas d'un sous-groupe central	52
5.8. Compléments	54
5.9. Une propriété des groupes de dimension cohomologique ≤ 1	54

Indications bibliographiques sur le Chapitre I	58
--	----

Annexes

1. (J. Tate) – Quelques théorèmes de dualité	59
2. (J-L. Verdier) – Dualité dans la cohomologie des groupes profinis ...	64
1. Modules induits et co-induits	64
2. Homomorphismes locaux	67
3. Le théorème de dualité	69
4. Application du théorème de dualité	73
3. L'inégalité de Golod-Šafarevič	77
1. Énoncé	77
2. Démonstration	78

Chapitre II. Cohomologie galoisienne – cas commutatif

§ 1. Généralités	82
1.1. Cohomologie galoisienne	82
1.2. Premiers exemples	83
§ 2. Critères de dimension cohomologique	85
2.1. Un résultat auxiliaire	85
2.2. Cas où p est égal à la caractéristique	86
2.3. Cas où p est différent de la caractéristique	87
§ 3. Corps de dimension ≤ 1	88
3.1. Définition	88
3.2. Relation avec la propriété (C_1)	89
3.3. Exemples de corps de dimension ≤ 1	90
§ 4. Théorèmes de transition	93
4.1. Extensions algébriques	93
4.2. Extensions transcendantes	93
4.3. Corps locaux	95
4.4. Dimension cohomologique du groupe de Galois d'un corps de nombres algébriques	97
4.5. La propriété (C_r)	97
§ 5. Corps p -adiques	100
5.1. Rappels	100
5.2. Cohomologie des G_k -modules finis	100
5.3. Premières applications	103
5.4. Caractéristique d'Euler-Poincaré (cas élémentaire)	103
5.5. Cohomologie non ramifiée	105
5.6. Le groupe de Galois de la p -extension maximale de k	105
5.7. Caractéristique d'Euler-Poincaré	108
5.8. Groupes de type multiplicatif	112
§ 6. Corps de nombres algébriques	115
6.1. Modules finis – définition des groupes $P^i(k, A)$	115
6.2. Le théorème de propreté	116
6.3. Énoncés des théorèmes de Poitou et Tate	118
Indications bibliographiques sur le Chapitre II	119

Annexe. Cohomologie galoisienne des extensions transcendentes pures (Résumé des cours de 1991–1992)	120
1. Une suite exacte	120
2. Le cas local	121
3. Courbes algébriques et corps de fonctions d'une variable	121
4. Le cas où $K = k(T)$	122
5. Notations	123
6. Annulation par changement de base	124
7. Conditions de Manin, approximation faible et hypothèse de Schinzel	125
8. Bornes du crible	126

Chapitre III. Cohomologie galoisienne non commutative

§ 1. Formes	128
1.1. Tenseurs	128
1.2. Exemples	130
1.3. Variétés, groupes algébriques, etc.	131
1.4. Exemple: les k -formes du groupe SL_n	132
§ 2. Corps de dimension ≤ 1	135
2.1. Rappels sur les groupes linéaires	135
2.2. Nullité de H^1 pour les groupes linéaires connexes	137
2.3. Le théorème de Steinberg	139
2.4. Points rationnels sur les espaces homogènes	141
§ 3. Corps de dimension ≤ 2	146
3.1. La conjecture II	146
3.2. Exemples	147
§ 4. Théorèmes de finitude	149
4.1. La condition (F)	149
4.2. Corps de type (F)	150
4.3. Finitude de la cohomologie des groupes linéaires	151
4.4. Finitude d'orbites	153
4.5. Le cas réel	154
4.6. Corps de nombres algébriques (théorème de Borel)	156
4.7. Un contre-exemple au "principe de Hasse"	156

Indications bibliographiques sur le Chapitre III	161
---	-----

Annexe. Compléments de cohomologie galoisienne (Résumé des cours de 1990–1991)	162
1. Notations	162
2. Le cas orthogonal	162
3. Applications et exemples	164
4. Problèmes d'injectivité	166
5. La forme trace	167
6. La théorie de Bayer-Lenstra: bases normales autoduales	168
7. Classes de cohomologie négligeables	170

Bibliographie	171
----------------------------	-----

Index	180
--------------------	-----