

Inhaltsverzeichnis

1 Anfänge von Arithmetik und Algebra	1
1.1 Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn	2
1.2 Arithmetik und Algebra im alten Ägypten	6
1.2.0 Abriß der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal ...	8
1.2.1 Altägyptische Zahlzeichen	12
1.2.2 Arithmetik im alten Ägypten	13
1.2.3 Primitive Algebra	15
1.3 Mesopotamische (Babylonische) Algebra	20
1.3.0 Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien	21
1.3.1 Zahlzeichen in Keilschrift	27
1.3.2 Die Methode des einfachen falschen Ansatzes	29
1.3.3 Lineare Gleichungssysteme	30
1.3.4 Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen	34
1.3.5 Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems	38
1.3.6 Näherungswerte von $\sqrt{2}$	39
1.4 Aufgaben zu Kapitel 1	43
2 Die geometrische Algebra der Griechen	45
2.0 Einführung	48
2.1 Beginn des abstrakten Denkens	49
2.1.1 Ionische Periode (ca. 600 – 450 v. Chr.)	50
2.1.2 Athenische Periode (450 – 300 v. Chr.)	52
2.1.3 Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr. – ca. 150 n. Chr.) ..	56
2.1.4 Spätantike (ca. 300 – ca. 500 n. Chr.)	57
2.2 Das besondere Merkmal der griechischen Algebra	59
2.3 Lineare und quadratische Gleichungen	62
2.3.1 Die „Elemente“ des Euklid	62
2.3.2 Die Methode der Flächenanlegung	66
2.3.3 Lineare Gleichungen	67
2.3.4 Rein quadratische Gleichungen	69
2.3.5 Ein Diorismos	69
2.3.6 Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid	72
2.4 Kubische und biquadratische Gleichungen	74
2.4.1 Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes	75

2.4.2	Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes	80
2.4.3	Dreiteilung des Winkels nach Archimedes	83
2.4.4	Archimedes und die biquadratischen Gleichungen	84
2.4.5	Das Delische Problem – die Würfelverdopplung	86
2.5	Die Quadratur des Kreises mittels der Kurve Quadratrix	90
2.6	„Formale Algebra“	94
2.6.1	Formale Algebra vor Diophant	94
2.6.2	Synkopierte Algebra	95
2.6.3	„Arithmetika“ von Diophant	97
2.7	Aufgaben zu Kapitel 2	103
3	Algebra im Orient	105
3.1	Algebra in China	106
3.1.0	Geschichtlicher Abriß	107
3.1.1	Zahlzeichen	116
3.1.2	Quadrat- und Kubikwurzeln	118
3.1.3	Der doppelte falsche Ansatz (Überschuß und Fehlbetrag) ..	120
3.1.4	Lineare Gleichungssysteme	122
3.1.5	Algebra im 13. Jahrhundert	124
3.2	Algebra in Indien	128
3.2.0	Geschichtlicher Abriß	130
3.2.1	Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem	134
3.2.2	Algebraische Ausdrucksweise	137
3.2.3	Näherungsverfahren für Wurzeln	138
3.2.4	Lineare Gleichungen	139
3.2.5	Quadratische Gleichungen	141
3.3	Algebra in den Ländern des Islam	146
3.3.0	Geschichtlicher Abriß	148
3.3.1	Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern	161
3.3.2	Algebraische Ausdrucksweise	162
3.3.3	Lineare und unbestimmte Gleichungen	165
3.3.4	Quadratische Gleichungen	166
3.3.5	Arithmetisierung der Algebra	173
3.3.6	Die (geometrische) Theorie von ‘Umar Ḥayyām für die Gleichungen dritten Grades	175
3.3.7	Eine Abhandlung von Ḥayyām über Algebra	180
3.3.8	Gleichungen vierten Grades	183
3.3.9	Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen	185
3.4	Aufgaben zu Kapitel 3	193

4 Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance ..	197
4.0 Einführung	199
4.1 Übersetzungen aus dem Arabischen	204
4.2 Leonardo von Pisa	206
4.3 Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris	210
4.4 Die Entwicklung in Italien	214
4.4.1 Luca Pacioli	218
4.5 Entwicklungen in Westeuropa	220
4.5.1 Nicolas Chuquet	220
4.5.2 Robert Recorde	221
4.5.3 Simon Stevin	223
4.5.4 Pedro Nunes	224
4.6 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum – die sog. Deutsche Coß	227
4.6.1 Die sog. Deutsche Coß	229
4.6.2 Adam Ries, Abraham Ries u. Jacob Ries als Cossisten ...	233
4.6.3 Chistoph Rudolff und Michael Stifel	239
4.7 Zur Entwicklung des Zahlbegriffes	242
4.8 Aufgaben	246
5 Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16./17. Jh.)	249
5.0 Vorbemerkungen	251
5.1 Gleichungen dritten und vierten Grades	253
5.1.1 Lösungen für Gleichungen dritten Grades	253
5.1.2 Niccolò Tartaglia	255
5.1.3 Girolamo Cardano	257
5.1.4 Auflösung von Gleichungen vierten Grades	261
5.1.5 Rafael Bombelli	263
5.2 Viète und Descartes	266
5.2.1 François Viète (Franciscus Vieta)	266
5.2.2 René Descartes	274
5.2.3 Die algebraischen Methoden von Descartes	276
5.3 Newton und Euler	281
5.3.1 Isaac Newton	281
5.3.2 Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra ...	283
5.3.3 Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra ...	286
5.3.4 Euler und sein Algebralehrbuch	289
5.4 Aufgaben	294

6 Algebra in der 2. Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts	297
6.0 Historische Einführung	299
6.1 Die Begründung des Rechnens in den gewöhnlichen Zahlbereichen	302
6.2 Die Begründung der komplexen Zahlen	306
6.3 Algebra als Methode	311
6.4 Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung n -ten Grades in Radikalen	317
6.4.1 Die Ergebnisse von Lagrange	318
6.4.2 Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring	321
6.4.3 Ruffini und die Anfänge der Permutationsgruppen	323
6.4.4 Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung	325
6.4.5 Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades	328
6.5 Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Gauß	331
6.6 Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche	335
6.6.1 Determinanten	335
6.6.2 Einfluß der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß	340
6.7 Aufgaben zu Kapitel 6	345
7 Die Herausbildung erster Strukturbegriffe	347
7.0 Vorbemerkungen	349
7.1 Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie	350
7.1.1 Der Beitrag von Niels Henrik Abel	350
7.1.2 Die Lösung des Problems durch Evariste Galois	354
7.2 Von Permutationen zu Permutationsgruppen	362
7.3 Auf dem Weg zur abstrakten Algebra	366
7.3.1 George Peacock	369
7.3.2 Augustus de Morgan	371
7.3.3 Duncan Farquharson Gregory	374
7.3.4 George Boole und die Algebra der Logik	375
7.4 Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme	378
7.4.1 William Rowan Hamilton und die Quaternionen	378
7.4.2 Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs	387
7.5 Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra	391
7.5.1 Ganze Gaußsche Zahlen und Reziprozitätsgesetze	391
7.5.2 Kummers Schöpfung der idealen Zahlen	397
7.6 Die Fortschritte in der linearen Algebra	400
7.6.1 Die Entwicklung des Matrizenkalküls	404

7.6.2 Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume	410
7.6.3 Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann	414
7.7 Aufgaben zu Kapitel 7	424
8 Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880	429
8.0 Vorbemerkungen	431
8.1 Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie	434
8.1.1 Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland	435
8.1.2 Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan	438
8.2 Die große Zeit der Invariantentheorie	447
8.2.1 Die britische Schule der Invariantentheorie	447
8.2.2 Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie	451
8.3 Die Theorie der Transformationsgruppen	454
8.3.1 Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen	454
8.3.2 Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen	460
8.4 Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen	465
8.4.1 Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“	466
8.4.2 Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce	467
8.5 Aufgaben zu Kapitel 8	474
9 Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert	475
9.0 Vorbemerkungen	477
9.1 Mengenlehre und Algebra der Logik	478
9.1.1 Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus	480
9.1.2 Die axiomatische Methode	485
9.2 Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs	489
9.3 Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Divisoren, Körper	504
9.4 Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs	515
9.5 Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra	527
9.5.1 Hyperkomplexe Systeme (Algebren)	527
9.5.2 Darstellungen von Gruppen und Algebren	537
9.5.3 Die algebraische Geometrie	541
9.6 Aufgaben zu Kapitel 9	547

10 Die Algebra im 20. Jahrhundert	551
10.0 Vorbemerkungen	553
10.1 Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra	557
10.1.1 Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie	558
10.1.2 „Moderne Algebra“	563
10.2 Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen	569
10.2.1 Die Entstehung der Verbandstheorie	572
10.2.2 Bourbaki und Strukturkonzepte	577
10.3 Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra	582
10.3.1 Die algebraische Geometrie	583
10.3.2 Anwendungen der Algebra in der Physik	586
10.3.3 Die algebraische Durchdringung der Topologie	588
10.3.4 Algebraische Methoden in anderen Bereichen	590
10.4 Computeralgebra	593
10.4.1 Vorbemerkungen	593
10.4.2 Charakterisierung der Computeralgebra	595
10.4.3 Die Entwicklung von Algorithmen	599
10.4.4 Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen	606
10.4.5 Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft	608
10.5 Aufgaben zu Kapitel 10	612
Literaturverzeichnis	613
Personenregister mit Lebensdaten	633
Index	643