

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Laplace-Verteilungen und diskrete Modelle</b>	<b>5</b>
2.1	Stichproben und Permutationen	6
2.1.1	Ziehen mit Zurücklegen	6
2.1.2	Ziehen ohne Zurücklegen	7
2.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	10
2.3	Übungsaufgaben	11
<b>3</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit</b>	<b>15</b>
3.1	Kolmogorovs Axiome für Wahrscheinlichkeiten	15
3.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	18
3.3	Stochastische Unabhängigkeit	21
3.4	Das Hardy-Weinberg-Gesetz	24
3.5	Produkt Räume	26
3.6	Übungsaufgaben	27
<b>4</b>	<b>Zufallsvariablen und spezielle Verteilungen</b>	<b>31</b>
4.1	Stochastische Unabhängigkeit	32
4.2	Spezielle Verteilungen	35
4.2.1	Bernoulli-Folgen und Binomialverteilungen	35
4.2.2	Hypergeometrische Verteilungen	37
4.2.3	Poissonverteilungen	40
4.2.4	Wartezeiten und geometrische Verteilungen	41
4.3	Kodierungen von Permutationen	42

4.3.1	Das "Sekretärinnenproblem" .....	43
4.3.2	Simulation von Zufallspermutationen .....	47
4.4	Faltungen .....	48
4.5	Die Laufzeit von 'QuickSort' .....	50
4.6	Übungsaufgaben .....	56
<b>5</b>	<b>Statistische Anwendungen: Konfidenzbereiche</b> .....	<b>63</b>
5.1	Konfidenzbereiche .....	64
5.2	Konfidenzschranken für Binomialparameter .....	67
5.3	Konfidenzschranken für hypergeometrische Verteilungen .....	72
5.4	Vergleich zweier Binomialparameter .....	76
5.5	Übungsaufgaben .....	80
<b>6</b>	<b>Erwartungswerte und Standardabweichungen</b> .....	<b>85</b>
6.1	Definition und Eigenschaften des Erwartungswertes .....	85
6.2	Die Markov-Ungleichung .....	91
6.3	Produkte von Zufallsvariablen .....	92
6.4	Varianzen und Standardabweichungen .....	94
6.5	Kovarianzen .....	96
6.6	Anwendungen .....	101
6.6.1	Die Laufzeit von Quicksort .....	101
6.6.2	Der Weierstraßsche Approximationssatz .....	104
6.6.3	Stochastische Aspekte von Sequenzvergleichen .....	107
6.7	Das schwache Gesetz der großen Zahlen .....	113
6.8	Übungsaufgaben .....	115
<b>7</b>	<b>Erzeugende Funktionen und Exponentialungleichungen</b> ...	<b>119</b>
7.1	Erzeugende Funktionen .....	119
7.2	Momentenerzeugende Funktionen .....	121
7.3	Exponentialungleichungen .....	122
7.4	Die Hoeffding-Ungleichung .....	125
7.5	Übungsaufgaben .....	127
<b>8</b>	<b>Informationstheorie</b> .....	<b>129</b>
8.1	Fragestrategien und Kodes .....	129
8.2	Entropie .....	134
8.3	Optimale Kodierung nach der Huffman-Methode .....	136
8.4	Übungsaufgaben .....	141

<b>9</b>	<b>Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume</b> .....	145
9.1	Die Kolmogorovschen Axiome .....	147
9.2	Existenz und Eindeutigkeit von Maßen .....	149
9.2.1	Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .....	149
9.2.2	Borelmengen und Volumen im $\mathbb{R}^d$ .....	150
9.2.3	Zufallsvariablen und Messbarkeit .....	151
9.2.4	Eindeutigkeit von Maßen .....	152
9.3	Bernoullifolgen .....	152
9.3.1	Bernoullis Gesetz der großen Zahlen .....	152
9.3.2	Die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ .....	153
9.3.3	Smirnovs Test .....	156
9.4	Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ .....	158
9.4.1	Uniforme Verteilungen und Quantiltransformationen ...	160
9.4.2	Beispiele von Verteilungs- und Quantilfunktionen .....	164
9.4.3	Folgen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen .....	165
9.5	Übungsaufgaben .....	165
<b>10</b>	<b>Integrale und Erwartungswerte</b> .....	169
10.1	Lebesgue-Integrale .....	169
10.2	Erwartungswerte .....	172
10.3	Der Satz von Fubini .....	175
10.4	Die Transformationsformel für das Lebesguemaß .....	177
10.5	Starke Gesetze der großen Zahlen .....	180
10.6	Übungsaufgaben .....	183
<b>11</b>	<b>Computersimulation von Zufallsvariablen</b> .....	185
11.1	Monte-Carlo-Schätzer .....	185
11.2	Pseudozufallszahlen .....	186
11.3	Acceptance-Rejection-Verfahren .....	188
11.4	Übungsaufgaben .....	194
<b>12</b>	<b>Markovketten</b> .....	195
12.1	Definition, Beispiele und allgemeine Eigenschaften .....	195
12.2	Homogene Markovketten .....	200
12.3	Absorptionswahrscheinlichkeiten .....	202
12.4	Das Langzeitverhalten .....	205
12.4.1	Rekurrenz .....	205
12.4.2	Invariante Verteilungen .....	208

12.4.3	Periodizität .....	213
12.4.4	Konvergenz von $p_n(\cdot, \cdot)$ .....	216
12.5	Simulated Annealing .....	223
12.6	Übungsaufgaben .....	226
<b>13</b>	<b>Approximation von Verteilungen</b> .....	<b>229</b>
13.1	Die Poissonapproximation .....	229
13.2	Poissonprozesse .....	231
13.2.1	Existenz und Simulation von Poissonprozessen .....	232
13.2.2	Rechtfertigung des Modells .....	234
13.2.3	Poissonprozesse auf $[0, \infty[$ .....	236
13.3	Normalapproximationen .....	238
13.3.1	Der Zentrale Grenzwertsatz .....	240
13.4	Übungsaufgaben .....	244
<b>14</b>	<b>Maximum-Likelihood-Schätzer und EM-Algorithmus</b> .....	<b>245</b>
14.1	Maximum-Likelihood-Schätzer .....	245
14.2	Der Expectation-Maximization-Algorithmus .....	251
<b>A</b>	<b>Analytische Hilfsmittel</b> .....	<b>259</b>
A.1	Eine Optimierungsmethode von Lagrange .....	259
A.2	Die Stirlingsche Approximationsformel .....	260
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>263</b>
	<b>Index</b> .....	<b>265</b>