

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	v
Vorwort zur ersten Auflage .....	vi
Bezeichnungen .....	xiii
<i>Kapitel I</i>	
<i>Einführung</i>	
	1
§ 1. Beispiele und Typeneinteilung .....	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 7 — Sachgemäß gestellte Probleme 8	
§ 2. Maximumprinzip .....	11
Beispiele 12 — Folgerungen 13	
§ 3. Differenzenverfahren .....	15
Diskretisierung 15 — Diskretes Maximumprinzip 18	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren .....	21
Konsistenz 21 — Lokaler und globaler Fehler 21 — Grenzen der Konvergenztheorie 24	
<i>Kapitel II</i>	
<i>Konforme Finite Elemente</i>	
	26
§ 1. Sobolev-Räume .....	27
Einführung der Sobolev-Räume 27 — Die Friedrichssche Ungleichung 29 — Singularitäten von $H^1$ -Funktionen 30 — Kompakte Einbettungen 31	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung .....	33
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 40	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz .....	42
Elliptizität in $H^1$ 42 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 43 — Neumannsche Randbedingungen 44 — Gemischte Randbedingungen 45 — Beweis des Spursatzes 45 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 48	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente .....	51
Modellproblem 54	
§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente .....	57
Forderungen an die Triangulierung 58 — Bedeutung der Differenzierbarkeits-eigenschaften 59 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 61 —	

Bemerkung zu $C^1$ -Elementen 62 — Bilineare Elemente 64 — Quadratische Viereckelemente 66 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 70	
§ 6. Approximationssätze .....	72
Der Fragenkreis um das Bramble–Hilbert–Lemma 73 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 74 — Bilineare Viereckelemente 78 — Inverse Abschätzungen 79 — Cléments Operator 80 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 82	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung .....	85
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 85 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 86 — $L_2$ -Abschätzungen 87 — Eine einfache $L_\infty$ -Abschätzung 89 — Der $L_2$ -Projektor 90	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen .....	92
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 92 — Innere Kondensation 94 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 95 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 95 — Teilweise Netzverfeinerungen 95	
<i>Kapitel III</i>	
<i>Nichtkonforme und andere Methoden</i>	
	99
§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation .....	100
Die Lemmas von Strang 100 — Dualitätstechnik 102 — Das Crouzeix–Raviart–Element 103 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 106 — Modifikationen beim Dualitätsargument 108	
§ 2. Isoparametrische Elemente .....	111
Isoparametrische Dreieckelemente 111 — Isoparametrische Viereckelemente 113	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel .....	116
Negative Normen 116 — Adjungierte Operatoren 118 — Ein abstrakter Existenzsatz 118 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 120 — Beweis von Satz 3.4 121	
§ 4. Sattelpunktprobleme .....	123
Sattelpunkte und Minima 123 — Die inf-sup-Bedingung 124 — Gemischte Finite-Element-Methoden 128 — Fortin-Interpolation 129 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 131	
§ 5. Gemischte Methoden für die Poisson-Gleichung .....	136
Die Poisson-Gleichung als gemischtes Problem 136 — Das Raviart–Thomas–Element 139 — Interpolation mit Raviart–Thomas–Elementen 140 — Implementierung und nachträgliche Verbesserung 142 — Gitterabhängige Normen für das Raviart–Thomas–Element 143 — Der Aufweichungs-Effekt gemischter Methoden 144	
§ 6. Die Stokessche Gleichung .....	148

Variationsformulierung 148 — Die inf-sup-Bedingung 150 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung 151 — Fast inkompressible Strömungen 152	
§ 7. Finite Elemente für das Stokes-Problem .....	153
Ein instabiles Element 153 — Das Taylor–Hood–Element 158 — Das MINI-Element 159 — Das divergenzfreie nichtkonforme $P_1$ -Element 160	
§ 8. A posteriori Abschätzungen .....	163
Residuale Schätzer 165 — Untere Abschätzungen 167 — Andere Schätzer 169 — Lokale Gitterverfeinerungen 170	

#### *Kapitel IV*

##### *Die Methode der konjugierten Gradienten*

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ....	172
Stationäre lineare Prozesse 172 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren 174 — Das Modellproblem 177 — Overrelaxation 177	
§ 2. Gradientenverfahren .....	181
Das allgemeine Gradientenverfahren 181 — Gradientenverfahren und quadratische Funktionen 182 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit großer Kondition 184	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen .....	186
Der Algorithmus 188 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Verfahren 190 — Verfahren der konjugierten Residuen 192 — Indefinite und unsymmetrische Matrizen 193	
§ 4. Vorkonditionierung .....	195
Vorkonditionierung durch SSOR 198 — Vorkonditionierung durch ILU 199 — Bemerkungen zur Parallelisierung 201 — Nichtlineare Probleme 202	
§ 5. Sattelpunktprobleme .....	206
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 206 — Eine Alternative 208	

#### *Kapitel V*

##### *Mehrgitterverfahren*

§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben .....	211
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 211 — Die Mehrgitter-Idee 212 — Der Algorithmus 213 — Der Übergang zwischen den Gittern 216	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren .....	221
Diskrete Normen 222 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 224 — Approximationseigenschaft 226 — Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren 227 — Andere Konzepte 228	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen .....	231

Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 231 — Die Verschärfung für die Energienorm 232 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 234

§ 4. Berechnung von Startwerten .....	238
Bestimmung von Startwerten 239 — Komplexität 240 — Mehrgitterverfahren mit wenigen Ebenen 241 — Das cascadische Mehrgitterverfahren 242	
§ 5. Analyse von Mehrgitterverfahren über Zerlegungen der Finite-Element-Räume 244	244
Das Schwarzsche alternierende Verfahren 245 — Algorithmen mit Teilraumzerlegungen aus algebraischer Sicht 247 — Hypothesen 248 — Direkte Folgerungen 249 — Konvergenz der multiplikativen Methode 250 — Nachweis der Hypothese A.1 252 — Lokale Gitterverfeinerungen 253	
§ 6. Nichtlineare Probleme .....	255
Mehrgitter-Newton-Verfahren 256 — Das nichtlineare Mehrgitterverfahren 257 — Startwerte 259	

### *Kapitel VI*

#### *Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper*

§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie .....	262
Kinematik 262 — Gleichgewichtsbedingungen 264 — Die Piola-Transformation 266 — Materialgesetze 267 — Lineare Materialgesetze 271	
§ 2. Hyperelastische Materialien .....	273
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie .....	276
Das Variationsproblem 276 — Die reine Verschiebungsmethode 280 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 282 — Die gemischte Methode nach Hu–Washizu 284 — Fast inkompressibles Material 286 — Locking 290 — Locking beim Timoschenko-Balken 293	
§ 4. Scheiben .....	295
Ebener Spannungszustand 295 — Ebener Verzerrungszustand 296 — Scheibenelemente 296 — Das PEERS-Element 297	
§ 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte .....	303
Die Hypothesen 303 — Bemerkungen zu Balken 306 — Gemischte Methoden für die Kirchhoff-Platte 306 — DKT-Elemente 308	
§ 6. Die Mindlin–Reissner–Platte .....	315
Die Helmholtz-Zerlegung 316 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 318 — MITC-Elemente 319 — Der Ansatz ohne Helmholtz-Zerlegung 323	
Literatur .....	327
Weitere Literatur zu Finiten Elementen .....	337
Sachverzeichnis .....	338