

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Auflage	v
Vorwort zur ersten Auflage	vi
Bezeichnungen	xv
<i>Kapitel I</i>	
<i>Einführung</i>	
§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 7 — Sachgemäß gestellte Probleme 8 — Aufgaben 10	
§ 2. Maximumprinzip	11
Beispiele 12 — Folgerungen 13 — Aufgaben 14	
§ 3. Differenzenverfahren	15
Diskretisierung 15 — Diskretes Maximumprinzip 18	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	21
Konsistenz 21 — Lokaler und globaler Fehler 21 — Grenzen der Konvergenztheorie 24 — Aufgaben 25	
<i>Kapitel II</i>	
<i>Konforme Finite Elemente</i>	
§ 1. Sobolev-Räume	27
Einführung der Sobolev-Räume 27 — Die Friedrichssche Ungleichung 29 — Singularitäten von $H^1$ -Funktionen 30 — Kompakte Einbettungen 31 — Aufgaben 31	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben	33
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 40 — Aufgaben 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	42
Elliptizität in $H^1$ 42 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedin- gungen 43 — Neumannsche Randbedingungen 44 — Gemischte Randbedin- gungen 45 — Beweis des Spursatzes 45 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 48 — Aufgaben 49	
§ 4. Ritz–Galerkin–Verfahren und einfache Finite Elemente	51
Modellproblem 54 — Aufgaben 56	

§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	57
Forderungen an die Triangulierung 58 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 59 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 61 — Bemerkung zu $C^1$ -Elementen 62 — Bilineare Elemente 64 — Quadratische Viereckelemente 66 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 70 — Aufgaben 70	
§ 6. Approximationssätze	72
Der Fragenkreis um das Bramble–Hilbert–Lemma 73 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 74 — Bilineare Viereckelemente 78 — Inverse Abschätzungen 79 — Cléments Operator 80 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 82 — Aufgaben 83	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	85
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 85 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 86 — $L_2$ -Abschätzungen 87 — Eine einfache $L_\infty$ -Abschätzung 89 — Der $L_2$ -Projektor 90 — Aufgaben 91	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	92
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 92 — Innere Kondensation 94 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 95 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 95 — Teilweise Netzverfeinerungen 95 — Zur Lösung des Neumann-Problems 97 — Aufgaben 97	
<i>Kapitel III</i>	
<i>Nichtkonforme und andere Methoden</i>	
	99
§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	100
Die Lemmas von Strang 100 — Dualitätstechnik 102 — Das Crouzeix–Raviart–Element 103 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 106 — Modifikationen beim Dualitätsargument 108 — Aufgaben 110	
§ 2. Isoparametrische Elemente	111
Isoparametrische Dreieckelemente 111 — Isoparametrische Viereckelemente 113 — Aufgaben 115	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	116
Negative Normen 116 — Adjungierte Operatoren 118 — Ein abstrakter Existenzsatz 118 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 120 — Beweis von Satz 3.4 121 — Aufgaben 122	
§ 4. Sattelpunktprobleme	123
Sattelpunkte und Minima 123 — Die inf-sup-Bedingung 124 — Gemischte Finite-Element-Methoden 128 — Fortin-Interpolation 129 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 131 — Typische Anwendungen 135 — Aufgaben 136	

§ 5. Gemischte Methoden für die Poisson-Gleichung	138
Die Poisson-Gleichung als gemischtes Problem 138 — Das Raviart-Thomas-Element 141 — Interpolation mit Raviart-Thomas-Elementen 142 — Implementierung und nachträgliche Verbesserung 145 — Gitterabhängige Normen für das Raviart-Thomas-Element 146 — Der Aufweichungs-Effekt gemischter Methoden 147 — Aufgaben 149	
§ 6. Die Stokessche Gleichung	151
Variationsformulierung 152 — Die inf-sup-Bedingung 153 — Fast inkompressible Strömungen 155 — Aufgaben 155	
§ 7. Finite Elemente für das Stokes-Problem	156
Ein instabiles Element 156 — Das Taylor-Hood-Element 161 — Das MINI-Element 162 — Das divergenzfreie nichtkonforme $P_1$ -Element 164 — Aufgaben 165	
§ 8. A posteriori Abschätzungen	166
Residuale Schätzer 168 — Untere Abschätzungen 170 — Bemerkungen zu anderen Schätzern 173 — Lokale Gitterverfeinerungen und Konvergenz 173	
§ 9. A Posteriori Schätzer über duale Variationsprobleme	175
Aufgaben 180	
<i>Kapitel IV</i>	
<i>Die Methode der konjugierten Gradienten</i>	
	181
§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Stationäre lineare Prozesse	182
— Gesamt- und Einzelschrittverfahren 184 — Das Modellproblem 187 — Overrelaxation 187 — Aufgaben 190	
§ 2. Gradientenverfahren	191
Das allgemeine Gradientenverfahren 191 — Gradientenverfahren und quadratische Funktionen 192 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit großer Kondition 194 — Aufgaben 195	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	196
Der Algorithmus 198 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Verfahren 200 — Verfahren der konjugierten Residuen 202 — Indefinite und unsymmetrische Matrizen 203 — Aufgaben 204	
§ 4. Vorkonditionierung	205
Vorkonditionierung durch SSOR 208 — Vorkonditionierung durch ILU 209 — Bemerkungen zur Parallelisierung 211 — Nichtlineare Probleme 212 — Aufgaben 213	
§ 5. Sattelpunktprobleme	216
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 216 — Eine Alternative 218 — Aufgaben 219	

*Kapitel V*  
*Mehrgitterverfahren* 220

- § 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben 221  
 Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 221 — Die Mehrgitter-Idee 222 — Der Algorithmus 223 — Der Übergang zwischen den Gittern 226 — Aufgaben 230
- § 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren 231  
 Diskrete Normen 232 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 234 — Approximationseigenschaft 236 — Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren 237 — Andere Konzepte 238 — Aufgaben 240
- § 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen 241  
 Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 241 — Die Verschärfung für die Energienorm 242 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 244 — Aufgaben 247
- § 4. Berechnung von Startwerten 248  
 Bestimmung von Startwerten 249 — Komplexität 250 — Mehrgitterverfahren mit wenigen Ebenen 251 — Das cascadierte Mehrgitterverfahren 252 — Aufgaben 253
- § 5. Analyse von Mehrgitterverfahren 254  
 Das Schwarzsche alternierende Verfahren 255 — Algorithmen mit Teilraumzerlegungen aus algebraischer Sicht 257 — Hypothesen 258 — Direkte Folgerungen 259 — Konvergenz der multiplikativen Methode 260 — Nachweis der Hypothese A.1 262 — Lokale Gitterverfeinerungen 263 — Aufgaben 264
- § 6. Nichtlineare Probleme 265  
 Mehrgitter-Newton-Verfahren 266 — Das nichtlineare Mehrgitterverfahren 267 — Startwerte 269 — Aufgaben 270

*Kapitel VI*  
*Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper* 271

- § 1. Einführung in die Elastizitätstheorie 272  
 Kinematik 272 — Gleichgewichtsbedingungen 274 — Die Piola-Transformation 276 — Materialgesetze 277 — Lineare Materialgesetze 281
- § 2. Hyperelastische Materialien 283  
 Aufgaben 285
- § 3. Lineare Elastizitätstheorie 286  
 Das Variationsproblem 286 — Die reine Verschiebungsmethode 290 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 292 — Die gemischte Methode nach Hu–Washizu 295 — Aufgaben 296

§ 4. Locking	298
Probleme mit kleinem Parameter 298 — Locking beim Timoschenko-Balken 301 — Fast inkompressibles Material 304 — Aufgabe 308	
§ 5. Scheiben	309
Ebener Spannungszustand 309 — Ebener Verzerrungszustand 310 — Scheibenelemente 318 — Das PEERS-Element 311 — Aufgaben 316	
§ 6. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte	317
Die Hypothesen 317 — Bemerkungen zu Balken 320 — Gemischte Methoden für die Kirchhoff-Platte 320 — DKT-Elemente 322 — Aufgaben 328	
§ 7. Die Mindlin–Reissner–Platte	329
Die Helmholtz-Zerlegung 330 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 332 — MITC-Elemente 333 — Der Ansatz ohne Helmholtz-Zerlegung 337 — Aufgaben 340	
Literatur	341
Sachverzeichnis	353