

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Finanzierung . . . . .	1
1.2 Ökonometrie . . . . .	3
1.3 Stochastische Analysis . . . . .	5
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	6
<b>Teil I Zeitreihenmodellierung</b>	<b>9</b>
<b>2 Grundlagen aus der Stochastik</b>	<b>13</b>
2.1 Zufallsvariablen . . . . .	13
2.2 Gemeinsame und bedingte Verteilungen . . . . .	21
2.3 Stochastische Prozesse (SP) . . . . .	26
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	32
<b>3 Autoregressive Moving-Average-Prozesse (ARMA)</b>	<b>41</b>
3.1 Moving-Average und allgemeine lineare Prozesse . . . . .	41
3.2 Lag-Polynome und Invertierbarkeit . . . . .	46
3.3 Autoregressive und gemischte Prozesse . . . . .	50
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	60
<b>4 Spektren stationärer Prozesse</b>	<b>67</b>
4.1 Definition und Interpretation . . . . .	67
4.2 Gefilterte und lineare Prozesse . . . . .	73
4.3 Konkrete ARMA-Prozesse . . . . .	77
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	84

<b>5 Prozesse mit bedingter Heteroskedastizität (ARCH)</b>	<b>89</b>
5.1 Zeitabhängige Heteroskedastizität . . . . .	89
5.2 ARCH-Modelle . . . . .	92
5.3 Verallgemeinerungen . . . . .	95
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	103
<b>Teil II Stochastische Integrale</b>	<b>109</b>
<b>6 Wiener-Prozesse (WP)</b>	<b>113</b>
6.1 Von der Irrfahrt zum Wiener-Prozess . . . . .	113
6.2 Eigenschaften . . . . .	119
6.3 Funktionen von Wiener-Prozessen . . . . .	123
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	129
<b>7 Riemann-Integrale</b>	<b>137</b>
7.1 Definition und Satz von Fubini . . . . .	137
7.2 Riemann-Integration von Wiener-Prozessen . . . . .	141
7.3 Konvergenz im quadratischen Mittel (iqM) . . . . .	144
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	147
<b>8 Stieltjes-Integrale</b>	<b>155</b>
8.1 Definition und partielle Integration . . . . .	155
8.2 Normalverteilung und Autokovarianzen . . . . .	157
8.3 Standard-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess . . . . .	160
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	163
<b>9 Ito-Integrale</b>	<b>169</b>
9.1 Ein Spezialfall . . . . .	169
9.2 Allgemeine Ito-Integrale . . . . .	174
9.3 (Quadratische) Variation . . . . .	177
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	184
<b>10 Itos Lemma</b>	<b>191</b>
10.1 Univariater Fall . . . . .	191
10.2 Bivariate Diffusionen mit einem WP . . . . .	196
10.3 Verallgemeinerung für unabhängige WP . . . . .	200
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	204

<b>Teil III Anwendungen</b>	<b>209</b>
<b>11 Stochastische Differentialgleichungen (SDG)</b>	<b>213</b>
11.1 Definition und Existenz . . . . .	213
11.2 Lineare stochastische Differentialgleichungen . . . . .	217
11.3 Numerische Lösungen . . . . .	223
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	224
<b>12 Zinsmodelle</b>	<b>235</b>
12.1 Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OUP) . . . . .	235
12.2 Positive lineare Zinsmodelle . . . . .	238
12.3 Nichtlineare Modelle . . . . .	241
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	245
<b>13 Asymptotik integrierter Prozesse</b>	<b>251</b>
13.1 Grenzverteilungen integrierter Prozesse . . . . .	251
13.2 Schwache Konvergenz von Funktionen . . . . .	257
13.3 Multivariate Grenzwerttheorie . . . . .	263
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	267
<b>14 Trends, Integrationstests und Nonsensregressionen</b>	<b>277</b>
14.1 Trendregression . . . . .	277
14.2 Integrationstests . . . . .	281
14.3 Nonsensregression . . . . .	284
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	287
<b>15 Kointegrationsanalyse</b>	<b>295</b>
15.1 Fehlerkorrektur und Kointegration . . . . .	295
15.2 Kointegrationsregressionen . . . . .	300
15.3 Testen und Schätzen im Fehlerkorrekturmodell . . . . .	304
Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge . . . . .	310
<b>Literatur</b>	<b>319</b>
<b>Index</b>	<b>323</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Simulierte MA(1)-Prozesse . . . . .	42
3.2	Simulierte AR(1)-Prozesse . . . . .	52
3.3	Stationaritätsdreieck für AR(2)-Prozesse . . . . .	55
3.4	Autokorrelogramme für AR(2)-Prozesse . . . . .	56
3.5	Autokorrelogramme für ARMA(1,1)-Prozesse . . . . .	59
4.1	Cosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen . . . . .	68
4.2	Spektren des MA( $S$ )-Prozesses . . . . .	72
4.3	Konjunkturzyklus . . . . .	73
4.4	AR(1)-Spektren bei positiver Autokorrelation . . . . .	79
4.5	AR(1)-Spektren . . . . .	80
4.6	AR(2)-Spektren . . . . .	81
4.7	ARMA(1,1)-Spektren . . . . .	82
4.8	Spektren multiplikativer saisonaler AR-Prozesse . . . . .	83
5.1	ARCH(1) mit $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_1 = 0.5$ . . . . .	95
5.2	ARCH(1) mit $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_1 = 0.9$ . . . . .	96
5.3	GARCH(1,1) mit $\alpha_0 = 1$ , $\alpha_1 = 0.3$ und $\beta_1 = 0.3$ . . . . .	98
5.4	GARCH(1,1) mit $\alpha_0 = 1$ , $\alpha_1 = 0.3$ und $\beta_1 = 0.5$ . . . . .	99
5.5	IGARCH(1,1) . . . . .	100
5.6	GARCH(1,1)-M . . . . .	101
5.7	EGARCH(1,1) . . . . .	103
6.1	Treppenfunktionen auf dem Intervall $[0,1]$ . . . . .	117
6.2	Simulierte Pfade des WP . . . . .	120
6.3	WP und Brownsche Bewegung . . . . .	123
6.4	WP und Brownsche Bewegung mit Drift . . . . .	124
6.5	WP und Brownsche Brücke . . . . .	125
6.6	WP und reflektierter WP samt Erwartungswert . . . . .	126
6.7	WP und geometrische Brownsche Bewegung . . . . .	127
6.8	Geometrische Brownsche Bewegung samt Erwartungswert . . . . .	128

## XVI Abbildungsverzeichnis

6.9	WP und Maximumsprozess samt Erwartungswert . . . . .	129
6.10	WP und integrierter WP . . . . .	130
8.1	Standard-Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse . . . . .	162
9.1	Sinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenz . . . . .	180
12.1	OUP mit Startwert $X(0) = \mu = 5$ . . . . .	238
12.2	OUP mit Startwert $X(0) = 5.1$ samt Erwartungswertfunktion	239
12.3	Zinsdynamik nach Dothan . . . . .	241
12.4	Zinsdynamik nach Brennan-Schwartz . . . . .	242
12.5	Zinsdynamik nach CKLS . . . . .	243
12.6	OUP und CIR . . . . .	245
14.1	Linearer Zeittrend . . . . .	280