

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	1
<b>2. Begriffe und Notationen</b> .....	3
2.1 Logische Formeln und Konnektoren .....	3
2.2 Grundkonzepte aus der Mengenlehre .....	6
2.2.1 Relationen .....	9
2.2.2 Funktionen .....	11
2.2.3 Isomorphie, Abzählbarkeit .....	13
2.3 Grundbegriffe aus der Algebra .....	17
2.4 Grundbegriffe aus der Graphentheorie .....	22
2.5 Grundbegriffe aus der Informatik .....	27
2.6 Probleme und Algorithmen .....	32
2.7 Zusammenfassung .....	33
<b>3. Eine kurze Einführung in die Aussagenlogik</b> .....	35
3.1 Syntax der Aussagenlogik .....	35
3.2 Semantik der Aussagenlogik .....	37
3.3 Wahrheitstafeln .....	40
3.4 SAT und TAUT .....	41
3.5 Äquivalenz von Formeln .....	42
3.6 Konjunktive und disjunktive Normalform .....	45
3.7 Zusammenfassung .....	48

---

## Teil I. Formale Sprachen

---

<b>4. Grammatiken und formale Sprachen</b> .....	53
4.1 Grammatiken .....	53
4.2 Die Sprachklassen der Chomsky-Hierarchie .....	56
4.3 Automaten .....	60
4.4 Zusammenfassung .....	61

<b>5. Reguläre Sprachen und endliche Automaten</b> .....	63
5.1 Verschiedene Automatentypen .....	63
5.1.1 Endliche Automaten .....	63
5.1.2 Indeterminierte endliche Automaten .....	67
5.1.3 Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten .....	75
5.1.4 Endliche Automaten mit Ausgabe: gsm .....	77
5.2 Rationale Sprachen und $\mathcal{L}_3$ .....	81
5.3 Abschlußeigenschaften von $\mathcal{L}_3$ .....	82
5.4 Eine weitere Charakterisierung von $\mathcal{L}_3$ : über reguläre Ausdrücke .....	83
5.5 Eine weitere Charakterisierung von $\mathcal{L}_3$ : über die Kongruenz $\sim_{\mathbf{L}}$ .....	87
5.6 Minimale Automaten .....	92
5.7 Das Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$ .....	102
5.8 Entscheidbare Probleme für $\mathcal{L}_3$ .....	105
5.9 Zusammenfassung .....	106
<b>6. Kontextfreie Sprachen</b> .....	109
6.1 Darstellung von kontextfreien Ableitungen in Baumform .....	109
6.2 Umformung von Grammatiken .....	113
6.3 Chomsky- und Greibach-Normalform .....	121
6.4 Das Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_2$ .....	128
6.5 Abschlußeigenschaften von $\mathcal{L}_2$ .....	132
6.6 Push-Down-Automaten (PDA) .....	133
6.7 Determiniert kontextfreie Sprachen (DCFL) .....	144
6.8 Probleme und Algorithmen zu cf-Sprachen .....	154
6.8.1 Das Wortproblem .....	154
6.8.2 Andere Probleme .....	159
6.9 Zusammenfassung .....	163
<b>7. Turing-Maschinen</b> .....	165
7.1 Determinierte Turing-Maschinen .....	166
7.2 TM-Flußdiagramme .....	169
7.3 Entscheidbarkeit, Akzeptierbarkeit, Aufzählbarkeit .....	172
7.4 Variationen von Turing-Maschinen .....	174
7.5 Universelle Turing-Maschinen .....	183
7.5.1 Gödelisierung .....	184
7.5.2 Eine konkrete universelle Turing-Maschine .....	186
7.6 Zusammenfassung .....	192
<b>8. Die Sprachklassen <math>\mathcal{L}</math>, <math>\mathcal{L}_0</math> und <math>\mathcal{L}_1</math></b> .....	195
8.1 $\mathcal{L}_1$ und beschränkte Grammatiken .....	195
8.2 Linear beschränkte Automaten und Turing-Maschinen .....	196
8.3 Entscheidbare Sprachen .....	202
8.4 $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}$ .....	207

8.5	Typ-1-Sprachen sind abgeschlossen gegen Komplement . . . . .	208
8.6	Zusammenfassung . . . . .	214
<b>9.</b>	<b>Abschlußeigenschaften von Sprachklassen . . . . .</b>	<b>215</b>
9.1	Überblick . . . . .	215
9.2	Beweise der Abschlußeigenschaften . . . . .	216
9.3	Zusammenfassung . . . . .	223
<hr/>		
<b>Teil II. Berechenbarkeit</b>		
<hr/>		
<b>10.</b>	<b>Einleitung . . . . .</b>	<b>227</b>
10.1	Immer mächtigere Automaten . . . . .	227
10.2	Die Churchsche These . . . . .	228
10.3	Was es außer Turing-Maschinen noch gibt . . . . .	228
10.4	Unentscheidbare Probleme . . . . .	229
10.5	Komplexitätstheorie . . . . .	230
10.6	Zusammenfassung . . . . .	231
<b>11.</b>	<b>Registermaschinen . . . . .</b>	<b>233</b>
11.1	Registermaschinen und LOOP-Programme . . . . .	234
11.2	WHILE-Programme . . . . .	238
11.3	GOTO-Programme . . . . .	241
11.4	GOTO-Programme und Turing-Maschinen . . . . .	244
11.5	LOOP-Programme und Turing-Maschinen . . . . .	247
11.6	Zusammenfassung . . . . .	251
<b>12.</b>	<b>Rekursive Funktionen . . . . .</b>	<b>253</b>
12.1	Primitiv rekursive Funktionen . . . . .	254
12.2	Arithmetische Funktionen, primitiv rekursiv ausgedrückt . . . . .	255
12.3	$\wp$ und LOOP . . . . .	262
12.4	$\mu$ -rekursive Funktionen . . . . .	271
12.5	$\mu$ -rekursive Funktionen gleichmächtig wie Turing-Maschinen . . . . .	274
12.6	Übersicht über die verschiedenen Berechenbarkeitsbegriffe . . . . .	286
12.7	Eine weitere universelle Turing-Maschine, die auf Kleenes Theorem basiert . . . . .	287
12.8	Zusammenfassung . . . . .	288
<b>13.</b>	<b>Unentscheidbare Probleme . . . . .</b>	<b>291</b>
13.1	Entscheidbarkeit, Akzeptierbarkeit, Aufzählbarkeit . . . . .	292
13.2	Eine Liste unentscheidbarer TM-Probleme . . . . .	294
13.3	Das spezielle Halteproblem . . . . .	297
13.4	Unentscheidbarkeits-Beweise via Reduktion . . . . .	298
13.5	Der Satz von Rice . . . . .	303

13.6	Unentscheidbarkeit und formale Sprachen	306
13.6.1	Semi-Thue-Systeme und Postsche Normalsysteme	307
13.6.2	Das PCP und unentscheidbare Probleme für $\mathcal{L}_2$	317
13.6.3	Entscheidbare und unentscheidbare Probleme für $\mathcal{L}_2$	322
13.6.4	Eine weitere Anwendung der Unentscheidbarkeit von $K_0$	322
13.7	Zusammenfassung	324
<b>14.</b>	<b>Alternative Berechnungsmodelle</b>	<b>327</b>
14.1	Ein-Register-Maschinen	327
14.2	Zwei-Register-Maschinen	332
14.3	Variationen über Zwei-Register-Maschinen	336
14.3.1	Turing-Maschinen mit eingeschränktem Alphabet	336
14.3.2	Ein System mit zwei Stapeln von leeren Blättern	337
14.3.3	Push-Down-Automaten mit Queue oder zwei Stapeln	337
14.3.4	Ein Stein im $\mathbb{N}^2$	338
14.4	Wang-Maschinen	338
14.5	Tag-Systeme	342
14.6	Rödding-Netze	351
14.7	Eine extrem kleine universelle zweidimensionale Turing-Maschine	378
14.8	Reversible Rechnungen	387
14.8.1	Abstrakte Rechenmodelle	387
14.8.2	Asynchrone Automaten und Netze	392
14.8.3	Berechnungsuniverselle chemisch reversible Netze	399
14.8.4	Chemisch reversible Grammatiken	405
14.8.5	Physikalisch reversible Schaltwerke	411
14.8.6	Physikalisch reversible Turing-Maschinen	418
14.9	Splicing	420
14.9.1	H-Systeme	421
14.9.2	Test-tube-Systeme	430
14.10	Zusammenfassung	435
<b>15.</b>	<b>Komplexität</b>	<b>439</b>
15.1	Abschätzung mit dem O-Kalkül	439
15.2	Aufwandberechnung und Turing-Maschinen	442
15.3	Abschätzung für determinierte und indetermierte Maschinen	446
15.4	NP-vollständige Probleme	450
15.5	Zusammenfassung	472
	<b>Bibliographische Hinweise</b>	<b>473</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>475</b>

**Sachverzeichnis** ..... 481