

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Mathematische Hilfsmittel</b> .....	1
§1. <b>Zur Matrizenrechnung</b> .....	1
Vektor- und Matrixprodukte – Determinanten und Kofaktoren – Eigenwerte und Eigenvektoren – Zerlegungen einer Matrix – Lineare Gleichungssysteme – Projektoren und Reflektoren – Der QR-Algorithmus – Die MOORE-PENROSE-Inverse – Über- und unterbestimmte Systeme – Drehung im $\mathbb{R}^3$ – Matrizen mit definitem Realteil	
§2. <b>Formeln der Vektoranalysis</b> .....	17
Bezeichnungen und Definitionen – Differential-Rechenregeln – Integral-Rechenregeln – Koordinatenunabhängige Definitionen – Potentiale und Vektorfelder	
§3. <b>Kurven im <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	24
Krümmung und Torsion – FRENETSche Formeln	
§4. <b>Lineare Differentialgleichungen</b> .....	27
Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten – Die allgemeine Lösung	
§5. <b>Lineare Differentialsysteme erster Ordnung</b> .....	31
Autonome homogene Systeme mit diagonalisierbarer Matrix – Autonome homogene Systeme mit nichtdiagonalisierbarer Matrix – Stabilität – Allgemeine lineare Systeme – Spezielle rechte Seiten – Randwertprobleme – Periodische Lösungen	
§6. <b>Der Fluss und sein Vektorfeld</b> .....	38
Das Flussintegral – Stationäre Vektorfelder – Begradigung von Vektorfeldern – Transformation – Beispiele	

§7.	<b>Vektorräume</b> .....	44
	Räume stetiger Funktionen – BANACH-Räume – Lineare Abbildungen – Lineare Funktionale und Hyperebenen – Der Dualraum – HILBERT- Räume – SOBOLEV-Räume – Annahme von Randwerten – Eigenschaften von $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$ – Äquivalente Normen auf $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\Omega)$	
§8.	<b>Ableitungen</b> .....	51
	GATEAUX-Ableitung, FRÉCHET-Ableitung – Eigenschaften – Beispiele	
§9.	<b>Abbildungen in Banach-Räumen</b> .....	56
	Lineare Operatoren – Projektoren – Implizite Funktionen	
§10.	<b>Konvexe Mengen und Funktionen</b> .....	60
	Konvexe Mengen und Kegel – Trennungssätze – Kegeleigenschaften – Konvexe Funktionen	
§11.	<b>Quadratische Funktionale</b> .....	68
	Das Energiefunktional – Operatoren im HILBERT-Raum – Projektoren im HILBERT-Raum – Eigenschaften des Energiefunktionals – Die RITZ- Näherung	
<b>Kapitel 2. Numerische Methoden</b> .....		77
§1.	<b>Interpolation und Approximation</b> .....	78
	Das allgemeine Interpolationsproblem – Interpolationspolynome – Inter- polation nach LAGRANGE – Interpolation nach NEWTON – Hinzunahme der Ableitungen – Approximation mit BEZIÉR-Polynomen – Interpolati- onsplines	
§2.	<b>Orthogonale Polynome</b> .....	88
	Konstruktion – Die Formeln von RODRIGUEZ – Minimaleigenschaft von TSCHEBYSCHJEFF-Polynomen	
§3.	<b>Numerische Integration</b> .....	93
	Quadratur nach LAGRANGE – Summierte Quadraturformeln – Quadra- tur nach GAUSS – Suboptimale Quadraturformeln – Gebietsintegrale – Natürliche Koordinaten im Dreieck – Polynome im Dreieck – Numeri- sche Quadraturformeln im Dreieck	
§4.	<b>Anfangswertprobleme</b> .....	104
	Das EULER-Verfahren – Allgemeine Einschrittverfahren – Asymptoti- sche Entwicklung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Mehrstellenverfahren – Zusammenfassung – Stabilität – Steife Systeme – Weitere Beispiele – Voll implizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
§5.	<b>Randwertprobleme</b> .....	127
	Das lineare Problem – Nichlinearer Fall – Randwertprobleme mit Para- meter	
§6.	<b>Periodische Probleme</b> .....	132
	Probleme mit bekannter Periode – Probleme mit unbekannter Periode	

<b>§7. Differential-algebraische Probleme</b> .....	135
Problemstellung – RUNGE-KUTTA-Verfahren – Reguläre Matrizenpaare – Differentialindex – Halb-explizite RUNGE-KUTTA-Verfahren	
<b>§8. Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	140
<b>Kapitel 3. Optimierung</b> .....	143
<b>§1. Minimierung einer Funktion</b> .....	144
Abstiegsverfahren – Negative Beispiele – Konvergenz – Effiziente Wahl der Abstiegsrichtung – NEWTON-Verfahren	
<b>§2. Extrema mit Nebenbedingungen</b> .....	149
Problemstellung – Multiplikatorregel	
<b>§3. Lineare Optimierung</b> .....	154
Beispiele – Problemstellung – Projektionsverfahren – Algorithmus – De- generierte Ecken – Mehrere Lösungen – Gleichungsrestriktionen – Sen- sitivität – Duales Problem – Das Tableau – Beispiel	
<b>§4. Linear-quadratische Probleme</b> .....	164
Das primale Verfahren – Der Algorithmus PLQP.M – Das duale Verfahren – Der Algorithmus DLQP.M – V-Tripel und L-Paar – Beispiel zum dualen Verfahren	
<b>§5. Nichtlineare Optimierung</b> .....	170
Das Gradientenverfahren – Typischer Iterationsschritt – Restoration – Strafkostenverfahren – Der Algorithmus SQP.M – Zusätze – Beispiele	
<b>§6. Abriss der Lagrange-Theorie</b> .....	178
Problemstellung – LAGRANGE-Problem – Sattelpunktprobleme – Pri- male und duale Probleme – Zusammenfassung – Geometrische Deutung – Lokale LAGRANGE-Theorie – Beispiele	
<b>§7. Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	191
<b>Kapitel 4. Wackeln mit System</b> .....	193
<b>§1. Variationsrechnung</b> .....	194
Extremalproblem und Randwertproblem – Modifizierte Problemstel- lung – Variabler Endpunkt – Numerische Behandlung – LEGENDRE- Transformation – LAGRANGE-Funktion und HAMILTON-Funktion – Bei- spiele	
<b>§2. Kontrollprobleme ohne Restriktionen</b> .....	207
Problemstellung – Freier Planungshorizont – Die freien LAGRANGE- Multiplikatoren – Der Kozustand – Maximumprinzip	
<b>§3. Kontrollprobleme mit Restriktionen</b> .....	213
Problemstellung – Notwendige Bedingungen – Maximumprinzip	

§4. <b>Beispiele</b> .....	218
Numerische Behandlung – Beispiele – Abbildungen	
§5. <b>Zum Re-Entry Problem</b> .....	228
§6. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	232
<b>Kapitel 5. Der Weg als Ziel</b> .....	235
§1. <b>Verzweigungsprobleme</b> .....	237
FREDHOLM-Operatoren – LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Klassifizierung – Bifurkationsgleichung – Symmetrie – Beispiele	
§2. <b>Wendepunkte</b> .....	249
Wendepunkte – Charakterisierung von Wendepunkten – Berechnung von Wendepunkten	
§3. <b>Verzweigungspunkte</b> .....	251
Verzweigungspunkte der nichtseparierten Form – Weitere Klassifizierung und Charakterisierung – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ I – Berechnung von Verzweigungspunkten vom Typ II	
§4. <b>Skalierung</b> .....	258
Modifizierte LJAPUNOV-SCHMIDT-Reduktion – Zwei Beispiele mit nichtdiagonalisierbarer Matrix $L$ – Homogene Probleme – Das nichtlineare Eigenwertproblem – Das gestörte Eigenwertproblem – Allgemeine Verzweigungspunkte	
§5. <b>Gewöhnliche Differentialsysteme</b> .....	269
Das lineare Randwertproblem – Das adjungierte Randwertproblem – Nichtlineare Randwertprobleme – Zur Stabilität – Beispiel	
§6. <b>Hopf-Verzweigung</b> .....	276
Problemstellung – Einfache Beispiele – Das Eigenwertproblem – Diskretisierung – Numerische Lösung – Beispiele	
§7. <b>Numerische Bifurkation</b> .....	288
Das nichtlineare Eigenwertproblem – Allgemeine Probleme – Ein klassisches Beispiel	
§8. <b>Fortsetzung</b> .....	295
Problemstellung – Prädiktorschritt – Korrektorschritt – Beispiele	
§9. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	301
<b>Kapitel 6. Massepunkte und starre Körper</b> .....	303
§1. <b>Die Kraft und ihr Moment</b> .....	303
§2. <b>Dynamik eines Massepunktes</b> .....	306
Bewegungsgleichung – Energie – Systeme mit einem Freiheitsgrad – Starre Drehung	
§3. <b>Massepunkt im Zentralfeld</b> .....	313
Zentralfelder – KEPLER-Problem – Numerische Lösung	

§4. <b>System von Massepunkten</b> .....	320
Bewegungsgleichungen – Potentielle Energie – Invarianten – Schwerpunkt	
§5. <b>Dreikörperproblem</b> .....	329
Problemstellung – Eingeschränktes Dreikörperproblem – Periodische Lösungen	
§6. <b>Drehendes Bezugssystem</b> .....	332
Drehung einer Basis – Zwei Drehungen – Bewegung im drehenden System – CORIOLIS-Kräfte	
§7. <b>Trägheitstensor und Kreisel</b> .....	338
Trägheitstensor – Starrer Körper mit ruhendem Punkt – Rotoren – Der kräftefreie Kreisel – Der kräftefreie symmetrische Kreisel – Der geführte symmetrische Kreisel – Kinematische EULER-Gleichungen – Der schwere symmetrische Kreisel	
§8. <b>Zur Behandlung von Mehrkörperproblemen</b> .....	349
§9. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	353
<b>Kapitel 7. Stäbe und Balken</b> .....	355
§1. <b>Balkenbiegung</b> .....	355
Zugstab – Balkenbiegung – Gesamtenergie – Variationsproblem und Randwertproblem – Momentengleichung – Weitere Randbedingungen – Existenz der Lösung	
§2. <b>Eigenwertprobleme</b> .....	364
Verallgemeinertes Eigenwertproblem – Knicklasten	
§3. <b>Numerische Behandlung</b> .....	369
Zugstab – Biegebalken – Beispiele	
§4. <b>Stabwerke</b> .....	372
Zugstab in allgemeiner Lage – ebene und räumliche Stabwerke – Lagerbedingungen – Lagerkräfte – Beispiele	
§5. <b>Balkenwerke</b> .....	378
Torsion – Gesamtenergie – Balken mit Biegung und Torsion in fast allgemeiner Lage – Numerische Approximation	
§6. <b>Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	383
<b>Kapitel 8. Kontinuumstheorie</b> .....	385
§1. <b>Deformationen</b> .....	385
Deformation – Ableitung des Gradienten – Materialableitung (substantielle Ableitung) – PIOLA-Transformation – Zurückholen des Divergenzsatzes	
§2. <b>Die drei Transporttheoreme</b> .....	392
§3. <b>Die Erhaltungssätze</b> .....	394
Massen-, Impuls-, Drehimpuls-, Energieerhaltungssatz – Erhaltungssätze in Differentialform – Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	

§4. <b>Materialformen</b> .....	402
§5. <b>Über Prinzipien der Mechanik</b> .....	405
Extremalprinzip – Prinzip von D’ALEMBERT – – Prinzip von HAMILTON	
§6. <b>Lineare Elastizitätstheorie</b> .....	409
Verzerrungstensor und Spannungstensor – Extremalproblem und Variationsproblem – ST.VENANT-KIRCHHOFF-Material	
§7. <b>Scheiben</b> .....	414
Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
§8. <b>Die Kirchhoff-Platte</b> .....	416
Extremalproblem und Variationsproblem – Umwandlung – Randwertproblem – Randbedingungen – Beispiel	
§9. <b>Stark gebogene Platten und Membran</b> .....	423
§10. <b>Flüssigkeiten und Gase</b> .....	425
Erhaltungssätze – Bezeichnungen – Erhaltungsgleichungen für zähe Fluide	
§11. <b>Navier-Stokes-Gleichungen</b> .....	429
Geschwindigkeits-Druck-Form – Randwertproblem – Dimensionsfreies System – Stromfunktion-Wirbelform – Zusammenhang mit der Plattengleichung	
<b>Kapitel 9. Finite Elemente</b> .....	437
§1. <b>Elliptische Randwertprobleme</b> .....	437
Das Extremalproblem – Die schwache Form – Das Randwertproblem – Lösbarkeit	
§2. <b>Von der Formel zum Bild</b> .....	441
Problemstellung – Approximation – lineare Dreieckselemente – Implementierung von DIRICHLET-Randbedingungen – Implementierung von CAUCHY-Randbedingungen – Beispiel	
§3. <b>Konstruktion von Finiten Elementen</b> .....	446
Problemstellung – Reduktion auf das Einheitsdreieck – Beispiel – Formfunktionen – Natürliche Koordinaten im Dreieck	
§4. <b>Weitere Konstruktionselemente</b> .....	454
HERMITESche Elemente – Finite Elemente für Scheiben – Ein kubisches Dreieckelement für Platten – Ein Dreieckelement mit gebogenem Rand – Das ARGYRIS-Element	
§5. <b>Singuläre Elemente</b> .....	465
§6. <b>Navier-Stokes-Gleichungen</b> .....	470
Geschwindigkeits-Druck-Form – allgemeine Form für inkompressible Fluide – Approximation – Stromfunktion-Wirbel-Form – Gekoppeltes System – Randbedingungen	
§7. <b>Vermischte Anwendungen</b> .....	481
Wärmeleitung – Konvektionsströmungen – Massentransport – Flachwasserprobleme	

<b>§8. Beispiele</b> .....	489
Navier-Stokes-Gleichungen – Konvektion – Flachwasserprobleme	
<b>§9. Hinweise zu den MATLAB-Programmen</b> .....	500
<b>Kapitel 10. Abriss der Tensorrechnung</b> .....	505
<b>§1. Tensoralgebra</b> .....	505
Basis- und Komponententransformation – Skalarprodukträume – Identifizierung von $V$ und $V_d$ – Allgemeine Tensoren – Darstellung und Transformation von Tensoren – Tensorprodukt – Der Vektorraum der Tensoren – Transformation von allgemeinen Tensoren – Verjüngung (Kontraktion) – Skalarprodukt von Tensoren – Herauf- und Herunterziehen von Indizes – Beispiele	
<b>§2. Algebra alternierender Tensoren</b> .....	523
Alternierende Tensoren – Alternierender Anteil von Tensoren – Äußeres Produkt von Tensoren – Basis – Darstellung alternierender Tensoren – Basistransformation – Skalarprodukt alternierender Tensoren	
<b>§3. Differentialformen im <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	529
Der abstrakte Tangentialraum und PFAFFSche Formen – Differentialformen – Äußere Ableitung – Geschlossene und exakte Formen – HODGE-Stern-Operator und Integralsätze – Abbildungen – „Pull back“ und „Push forward“	
<b>§4. Tensoranalysis</b> .....	542
EUKLIDische Mannigfaltigkeiten – Natürliche Koordinatensysteme – Darstellung und Transformation – CHRISTOFFEL-Symbole – Divergenz eines Skalarfeldes – Gradienten eines Tensors – Divergenz eines Tensorfeldes – Rotation eines Vektorfeldes	
<b>§5. Beispiele</b> .....	557
Orthogonale natürliche Koordinatensysteme – Divergenz und Rotation	
<b>§6. Transformationsgruppen</b> .....	562
Bezeichnungen und Definitionen – Beispiele – Einparametrische Transformationsgruppen – Die Erzeugende einer Gruppe	
<b>Kapitel 11. Fallstudien</b> .....	569
<b>§1. Ein Beispiel aus der Gasdynamik</b> .....	569
<b>§2. Die Reissner-Mindlin-Platte</b> .....	571
<b>§3. Beispiele zu Mehrkörperproblemen</b> .....	573
Doppelpendel – Siebenkörperproblem (ANDREW's Squeezer) – Roboter nach SCHIEHLEN	
<b>§4. Tanzende Scheiben</b> .....	577
Allgemeine Scheiben – Zahnräder mit Nullverzahnung	

<b>Kapitel 12. Anhang</b> .....	585
<b>§1. Bezeichnungen und Tabellen</b> .....	585
Bezeichnungen – Maßeinheiten und physikalische Konstanten – Grundmatrizen für den quadratischen Ansatz – Formfunktionen für den vollständigen kubischen Ansatz	
<b>§2. Matrizen-Zoo</b> .....	589
<b>§3. Translation und Drehung</b> .....	590
<b>§4. Trigonometrische Interpolation</b> .....	592
<b>§5. Der Dualraum des <math>C[a, b]</math></b> .....	597
<b>§6. Zykloiden</b> .....	599
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	603
<b>Sachverzeichnis</b> .....	613