

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Die Fibonacci-Zahlen und das Nordpolarmeer | 1 |
| 1 | Grundlegende Definitionen | 2 |
| A | Lucas-Folgen | 2 |
| B | Spezielle Lucas-Folgen | 3 |
| C | Verallgemeinerungen | 3 |
| 2 | Grundlegende Eigenschaften | 5 |
| A | Binets Formeln | 5 |
| B | Entartete Lucas-Folgen | 5 |
| C | Wachstum und numerische Berechnungen | 6 |
| D | Algebraische Beziehungen | 7 |
| E | Teilbarkeitseigenschaften | 9 |
| 3 | Primteiler von Lucas-Folgen | 10 |
| A | Die Mengen $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ und der Rang des Erscheinens | 10 |
| B | Primitive Faktoren von Lucas-Folgen | 17 |
| 4 | Primzahlen in Lucas-Folgen | 27 |
| 5 | Potenzen und quadratvolle Zahlen in Lucas-Folgen | 29 |
| A | Hauptsätze für Potenzen | 30 |
| B | Genauere Bestimmung bei speziellen Folgen | 31 |
| C | Einheitliche Bestimmung von Vielfachen, Quadraten und Quadratklassen für bestimmte Familien von Lucas-Folgen | 37 |
| D | Quadratvolle Zahlen in Lucas-Folgen | 43 |
| 2 | Darstellung reeller Zahlen mit Hilfe von Fibonacci- Zahlen | 53 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 3 | Primzahlrekorde | 65 |
| 4 | Primzahlverkauf | 83 |
| 5 | Eulers berühmtes primzahlerzeugendes Polynom | 97 |
| 1 | Quadratische Erweiterungen | 100 |
| 2 | Ganzheitsringe | 101 |
| 3 | Diskriminanten | 101 |
| 4 | Zerlegung von Primzahlen | 102 |
| | A Eigenschaften der Norm | 102 |
| 5 | Einheiten | 107 |
| 6 | Die Klassenzahl | 107 |
| | A Berechnung der Klassenzahl | 110 |
| | B Bestimmung aller quadratischen Zahlkörper mit Klassenzahl 1 | 112 |
| 7 | Der Hauptsatz | 115 |
| 6 | Gauß und das Klassenzahlproblem | 119 |
| 1 | Einführung | 119 |
| 2 | Höhepunkte im Leben von Gauß | 119 |
| 3 | Kurzer geschichtlicher Hintergrund | 121 |
| 4 | Binäre quadratische Formen | 122 |
| 5 | Die Hauptprobleme | 125 |
| 6 | Äquivalenz von Formen | 126 |
| 7 | Bedingte Lösung der Hauptprobleme | 127 |
| 8 | Echte Äquivalenzklassen definiter Formen | 129 |
| 9 | Echte Äquivalenzklassen indefiniter Formen | 133 |
| | A Ein weiteres Zahlenbeispiel | 138 |
| 10 | Die Automorphe einer einfachen Form | 138 |
| 11 | Komposition von echten Äquivalenzklassen einfacher Formen | 142 |
| 12 | Die Geschlechtertheorie | 144 |
| 13 | Die Struktur der Gruppe von echten Äquivalenzklassen einfacher Formen | 151 |
| 14 | Berechnungen und Vermutungen | 152 |
| 15 | Die Zeit nach Gauß | 154 |
| 16 | Formen im Vergleich zu Idealen in quadratischen Zahlkörpern | 154 |
| 17 | Dirichlets Klassenzahlformel | 161 |
| 18 | Lösung des Klassenzahlproblems für definite Formen ... | 165 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 19 | Das Klassenzahlproblem für indefinite Formen | 170 |
| 20 | Weitere Fragen und Vermutungen | 173 |
| 21 | Viele unbehandelte Themen | 177 |
| 7 | Aufeinanderfolgende Potenzen | 183 |
| 1 | Einführung | 183 |
| 2 | Geschichte | 185 |
| 3 | Spezialfälle | 187 |
| 4 | Teilbarkeitseigenschaften | 200 |
| 5 | Abschätzungen | 205 |
| | A Die Gleichung $a^U - b^V = 1$ | 205 |
| | B Die Gleichung $X^m - Y^n = 1$ | 207 |
| | C Die Gleichung $X^U - Y^V = 1$ | 211 |
| 6 | Der Beweis von Catalans Vermutung | 213 |
| 7 | Abschließende Kommentare und Anwendungen | 214 |
| 8 | 1093 | 223 |
| | A Bestimmung des Restes von $q_p(a)$ | 226 |
| | B Identitäten und Kongruenzen für den Fermat-Quotienten | 227 |
| 9 | Machtlos gegenüber Mächtigkeit | 241 |
| 1 | Potente Zahlen | 241 |
| | A Verteilung potenter Zahlen | 242 |
| | B Additive Probleme | 244 |
| | C Differenzprobleme | 245 |
| 2 | Potenzen | 247 |
| | A Pythagoreische Dreiecke und Fermats Problem | 247 |
| | B Varianten von Fermats Problem | 250 |
| | C Die Vermutung von Euler | 251 |
| | D Die Gleichung $AX^l + BY^m = CZ^n$ | 252 |
| | E Potenzen als Werte von Polynomen | 257 |
| 3 | Exponentielle Kongruenzen | 258 |
| | A Die Wieferich-Kongruenz | 258 |
| | B Primitive Primfaktoren | 261 |
| 4 | Traummathematik | 264 |
| | A Die Aussagen | 264 |
| | B Aussagen | 265 |
| | C Binomialzahlen und Wieferich-Kongruenzen | 267 |
| | D Erdős-Vermutung und Wieferich-Kongruenz | 270 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| E | Der Traum im Traum | 270 |
| 10 | Was für eine Art Zahl ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? | 285 |
| 1 | Einführung | 285 |
| 2 | Arten von Zahlen | 285 |
| 3 | Wie Zahlen gegeben sind | 290 |
| 4 | Ein kurzer historischer Abriss | 299 |
| 5 | Kettenbrüche | 302 |
| A | Allgemeines | 303 |
| B | Periodische Kettenbrüche | 304 |
| C | Einfache Kettenbrüche von π und e | 306 |
| 6 | Approximation durch rationale Zahlen | 310 |
| A | Die Ordnung der Approximation | 310 |
| B | Die Markoff-Zahlen | 312 |
| C | Maße für die Irrationalität | 314 |
| D | Ordnung der Approximierung von irrationalen algebraischen Zahlen | 314 |
| 7 | Irrationalität spezieller Zahlen | 316 |
| 8 | Transzendente Zahlen | 325 |
| A | Liouville-Zahlen | 325 |
| B | Approximation durch rationale Zahlen: Schärfere Sätze | 327 |
| C | Hermite, Lindemann und Weierstrass | 332 |
| D | Ein Resultat von Siegel über Exponenten | 334 |
| E | Hilberts siebtes Problem | 336 |
| F | Die Arbeit von Baker | 337 |
| G | Die Vermutung von Schanuel | 339 |
| H | Transzendenzmaß und die Klassifikation von Mahler | 344 |
| 9 | Schlussbemerkungen | 347 |
| 11 | Galimatias Arithmeticae | 361 |
| | Namensverzeichnis | 377 |
| | Sachverzeichnis | 385 |