

Inhaltsverzeichnis

1. Affine Geometrie

1.0. Allgemeine affine Räume

1.0.1. Parallelverschiebungen	1
1.0.2. Affine Unterräume von Vektorräumen	1
1.0.3. Gruppenhomomorphismen und Untergruppen	2
1.0.4. Operationen von Gruppen	3
1.0.5. Affine Räume	4
1.0.6. Vektorräume und affine Räume	5
1.0.7. Parallelogramme, freie Vektoren, Ortsvektoren	5
1.0.8. Synthetische Einführung affiner Räume	6

1.1. Affine Abbildungen und Unterräume

1.1.0. Affine Abbildungen von Vektorräumen	7
1.1.1. Affine Abbildungen affiner Räume	8
1.1.2. Einfache Eigenschaften affiner Abbildungen	9
1.1.3. Charakterisierung von Translationen	11
1.1.4. Affine Unterräume	11
1.1.5. Jeder affine Unterraum ist ein affiner Raum	12
1.1.6. Durchschnitt und Verbindung affiner Räume	12
1.1.7. Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume	13
1.1.8. Der Translationsraum des Verbindungsraumes	15
1.1.9. Geometrische Charakterisierung des Verbindungsraumes	16
1.1.10. Dimensionsformel	17
1.1.11. Projektionen in Vektorräumen	18
1.1.12. Parallele Unterräume, Parallelprojektionen	19

1.2. Affine Koordinaten

1.2.1. Affin unabhängige Punkte, affine Basen	21
1.2.2. Affine Basen und affine Abbildungen	22
1.2.3. Affine Koordinatensysteme	23
1.2.4. Das Teilverhältnis	23
1.2.5. Drei Sätze der Elementargeometrie	25
1.2.6. Parameterdarstellungen, Affinkombinationen	26
1.2.7. Parameterdarstellung des Durchschnitts	28
1.2.8. Beschreibung affiner Abbildungen durch Matrizen	29
1.2.9. Fixpunkte	30
1.2.10. Dilatationen	31

1.3. Kollineationen	
1.3.1. Affinitäten und Kollineationen	31
1.3.2. Körperautomorphismen	32
1.3.3. Semiaffinitäten	33
1.3.4. Der Hauptsatz der affinen Geometrie	35
1.4. Quadriken	
1.4.0. Ellipse, Hyperbel und Parabel	36
1.4.1. Definition von Quadriken	53
1.4.2. Beispiel einer Hauptachsentransformation	56
1.4.3. Satz über die Hauptachsentransformation	57
1.4.4. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	61
1.4.5. Geometrische Äquivalenz und projektiver Abschluß	64
1.4.6. Topologischer Abschluß	65
1.4.7. Geometrischer Klassifikationssatz	70
1.4.8. Normalformen	72
1.5. Euklidische affine Räume	
1.5.1. Definitionen und Beispiele	74
1.5.2. Isometrien	75
1.5.3. Kongruenzen	76
1.5.4. Eulersche Winkel	77
1.5.5. Ähnlichkeiten	79
1.5.6. Geometrische Charakterisierung von Ähnlichkeiten	80
1.5.7. Hauptachsentransformation von Affinitäten	81
1.5.8. Geometrische Hauptachsenkonstruktion	82
1.5.9. Metrische Hauptachsentransformation von Quadriken	85
1.5.10. Beispiele zur Hauptachsentransformation	89
2. Konvexe Mengen und lineare Optimierung	
2.0. Problemstellung	
2.0.1. Ein Beispiel	92
2.0.2. Formulierung der allgemeinen Aufgabe	94
2.1. Konvexe Mengen und ihre Extrempunkte	
2.1.1. Strecken, konvexe Mengen, Halbräume	95
2.1.2. Konvexe Hüllen und Konvexkombinationen	96
2.1.3. Simplex und Polyeder	97
2.1.4. Extrempunkte und Ecken	98
2.1.5. Existenz optimaler Extrempunkte	99
2.1.6. Berechnung der Extrempunkte	100
2.1.7. Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe	102

2.2. Das Simplexverfahren	
2.2.1. Ein Trennungslemma	103
2.2.2. Polyeder und Lösungen von Ungleichungssystemen	104
2.2.3. Ein Satz von Minkowski	105
2.2.4. Kanten von Polyedern	106
2.2.5. Das Austauschlemma	107
2.2.6. Das Eckentableau	109
2.2.7. Charakterisierung optimaler Ecken	110
2.2.8. Einfache und mehrfache Ecken	111
2.2.9. Übergang zu einer benachbarten Ecke	112
2.2.10. Pivotsuche mit Hilfe charakteristischer Quotienten	114
2.2.11. Rechenverfahren für den Übergang	115
2.2.12. Lösung der Optimierungsaufgabe	117
2.2.13. Ein Beispiel	119
2.3. Ausnahmefälle	
2.3.1. Nicht kompakte Lösungsmenge	121
2.3.2. Mehrere optimale Ecken	122
2.3.3. Mehrfache Ecken	122
2.3.4. Pivotsuche bei mehrfachen Ecken	123
2.3.5. Stationärer Austausch	124
2.3.6. Konvexe Optimierung	125
3. Projektive Geometrie	
3.0. Vorbemerkungen	
3.1. Projektive Räume und Unterräume	
3.1.1. Projektive Räume	134
3.1.2. Homogene Koordinaten	134
3.1.3. Projektive Unterräume	135
3.1.4. Unendlich ferne Hyperebene	135
3.1.5. Durchschnitt und Verbindung	137
3.2. Projektive Abbildungen und Koordinaten	
3.2.1. Projektive Abbildungen	138
3.2.2. Projektive Räume und affine Räume	140
3.2.3. Abschluß affiner Räume	144
3.2.4. Projektiv unabhängige Punkte, projektive Basen	144
3.2.5. Projektivitäten mit vorgeschriebenen Werten	146
3.2.6. Projektive Koordinaten	147
3.2.7. Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen	147
3.2.8. Beschreibung von projektiven Unterräumen durch Gleichungen	149
3.2.9. Zentralprojektionen und Perspektivitäten	150

3.3. Invarianten von Projektivitäten	
3.3.1. Doppelverhältnis	152
3.3.2. Berechnung des Doppelverhältnisses	154
3.3.3. Doppelverhältnis bei Permutation der Punkte	156
3.3.4. Doppelverhältnis und Teilverhältnis	157
3.3.5. Harmonische Punktepaare	157
3.3.6. Vollständige Vierseite	158
3.3.7. Die Sätze von Desargues und Pappos	159
3.3.8. Kollineationen und Semiprojektivitäten	163
3.3.9. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	163
3.3.10. Beweis des Hauptsatzes der affinen Geometrie	168
3.4. Dualität	
3.4.1. Pol und Polare beim Kreis	169
3.4.2. Korrelationen	171
3.4.3. Dualer projektiver Raum	172
3.4.4. Der Hauptsatz über Korrelationen	173
3.4.5. Korrelationen und Sesquilinearformen	173
3.4.6. Hyperebenenkoordinaten	174
3.4.7. Das Dualitätsprinzip	175
3.4.8. Hyperebenenbüschel	177
3.5. Quadriken	
3.5.1. Homogene Polynome, Kegel, Quadriken	179
3.5.2. Die Schnitte eines Kreiskegels	181
3.5.3. Quadriken und Bilinearformen	183
3.5.4. Projektive Bilder von Quadriken	184
3.5.5. Projektive Hauptachsentransformation	186
3.5.6. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	188
3.5.7. Bestimmung der Hauptachsenform	191
3.5.8. Verschiedene Gleichungen für eine Quadrik	193
3.5.9. Geometrische Klassifikation	195
3.5.10. Normalformen	198
3.5.11. Tangenten und Tangentialhyperebenen	201
3.5.12. Der Satz von Pascal	202
Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein	208
Literaturhinweise	210
Sachregister	212
Namensregister	214
Symbolverzeichnis	215