

Horst Rollnik

# **Quantentheorie**

Band 1:  
Grundlagen – Wellenmechanik – Axiomatik



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Grundlagen der Quantentheorie</b>	<b>1</b>
1.1	Das „Neue“ der Quantentheorie, begriffliche und pädagogische Schwierigkeiten	1
1.2	Philosophische Gründe	1
1.3	Physikalische Gründe für die Existenz eines Wirkungsquantums	4
1.4	Experimente zum Dualismus von Welle und Teilchen	8
1.5	Beschreibung von lokalisierten Zuständen	10
1.5.1	Punktmechanik	10
1.5.2	Wellenpakete als lokalisierte Zustände in der klassischen Feldtheorie	12
1.5.3	Zeitliche Entwicklung der Wellenpakete; Gruppengeschwindigkeit	20
1.6	Wellengleichungen für Materiefelder	22
1.6.1	Dispersionsrelationen für Elektronenwellen	22
1.6.2	Die Schrödingergleichung und die Klein-Gordon-Gleichung	24
1.6.3	Versuch einer Interpretation von $\psi(\vec{r}, t)$	26
1.7	Quanteneigenschaften von Elektronen und Photonen	28
1.7.1	Die Quanteneigenschaften des Elektrons, die Unzulänglichkeit des Materiefeldes	29
1.7.2	Quanteneigenschaften der Lichtwellen: Planck-de-Broglie-Relation und Comptoneffekt	30
1.8	Deutung der $\psi$ -Funktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude	33
1.8.1	Genauere Beschreibung der Elektronen-Beugungsexperimente	33
1.8.2	Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffes	36
1.8.3	Analyse des Zweispaltversuchs	38
1.9	Physikalische Ableitung der Unbestimmtheitsrelation, die Existenz der Atome	41
<b>2</b>	<b>Wellenmechanik</b>	<b>46</b>
2.1	Die Wahrscheinlichkeitsamplituden $\psi(\vec{r}, t)$ und $\tilde{\psi}(\vec{p}, t)$	46
2.2	Die Operatoren für Ort und Impuls	48
2.3	Observable, Zustände und Meßwerte	50
2.4	Das Korrespondenzprinzip	52
2.4.1	Der Energieoperator	53
2.4.2	Nicht vertauschbare Observable	54
2.4.3	Radial- und Drehimpuls	55
2.4.4	Hamiltonoperator für die Bewegung im elektromagnetischen Feld	61
2.5	Allgemeine Eigenschaften der wellenmechanischen Operatoren	63
2.6	Exkurs über die wichtigsten physikalischen Potentiale	64
2.6.1	Das Atom	64
2.6.2	Aufbau der Materie aus Atomen	65

2.6.3	Kernkräfte und die subnukleare Struktur . . . . .	68
2.6.4	Modellpotentiale . . . . .	68
2.7	Das Zweikörperproblem . . . . .	70
2.7.1	Reduktion auf ein äquivalentes Einkörperproblem . . . . .	71
2.7.2	Die stationäre Schrödingergleichung . . . . .	73
2.7.3	Allgemeine Diskussion des Eigenwertproblems . . . . .	74
2.7.4	Schrödingergleichung für radialsymmetrische Wellenfunktionen . . . . .	76
2.8	Qualitative Eigenschaften der Bindungszustände . . . . .	77
2.8.1	Bindungszustände im Kastenpotential . . . . .	78
2.8.2	Allgemeiner Beweis der Knotensätze . . . . .	82
2.8.3	Ein Stabilitätstheorem . . . . .	86
2.9	Differentialgleichungen mit regulären Singularitäten . . . . .	89
2.9.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	89
2.9.2	Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	94
2.9.3	Die Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse . . . . .	96
2.10	Lösung der Schrödingergleichung für physikalisch wichtige Potentiale . . . . .	102
2.10.1	Das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen . . . . .	104
2.10.2	Das Coulomb-Eigenwertproblem . . . . .	106
2.10.3	Das lineare Confinement-Potential . . . . .	109
2.10.4	Der harmonische, sphärische Oszillator . . . . .	112
2.10.5	Die Drehimpulsentartung beim Coulomb- und Oszillator-Potential . . . . .	116
2.10.6	Zusammenfassende Schlußfolgerungen . . . . .	122
2.11	Wellenmechanisches Streuproblem (I) . . . . .	123
2.11.1	Zeitabhängige und stationäre Beschreibung der Streuung . . . . .	124
2.11.2	Grundbegriffe der Streutheorie . . . . .	127
2.11.3	Streuung an der harten Kugel und dem Kastenpotential . . . . .	131
2.11.4	Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt . . . . .	137
2.11.5	Analyse des Wirkungsquerschnitts, die Breit-Wigner-Formel . . . . .	142
2.11.6	Analytische Eigenschaften der Streufunktionen . . . . .	146
2.11.7	Verallgemeinerung auf nicht abgeschnittene Potentiale . . . . .	155
2.11.8	Streulösungen für das Coulombpotential . . . . .	158
2.12	Wellenmechanische Streutheorie (II) . . . . .	159
2.12.1	Die Integralgleichung für die $\psi$ -Funktion . . . . .	160
2.12.2	Die Greensche Funktion des Helmholtz-Operators $\Delta + k^2$ . . . . .	162
2.12.3	Asymptotische Form der Streuwellenfunktion . . . . .	163
2.12.4	Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt . . . . .	165
2.12.5	Streuung am drehsymmetrischen Potential . . . . .	166
2.12.6	Bornsche Reihe und Feynmangraphen . . . . .	167
2.12.7	Die Bornsche Näherung . . . . .	172
2.12.8	Anwendung auf die Elektronenstreuung . . . . .	173
2.12.9	Beispiele für Formfaktoren . . . . .	178
2.13	Eichtransformationen in der Wellenmechanik . . . . .	180

<b>3</b>	<b>Axiomatischer Aufbau der Quantenmechanik</b>	<b>192</b>
3.1	Grundbegriffe und allgemeine Formulierung des Superpositionsprinzips	193
3.2	Die Ket- und Bra- Vektoren	197
3.3	Orthogonalität und Vollständigkeitsrelation	203
3.4	Beschreibung des Meßprozesses	207
3.4.1	Präparierung eines Zustands, Projektionsoperator	207
3.4.2	Messung einer Observablen	210
3.5	Die allgemeinen Axiome der Quantenmechanik	212
3.5.1	Das Zustandsaxiom	212
3.5.2	Lineare Operatoren im Hilbertraum	218
3.5.3	Das Observablenaxiom	224
3.5.4	Uneigentliche Eigenvektoren	232
3.5.5	Exakte Theorie der Spektraldarstellung	239
3.6	Funktionen von Operatoren	240
3.6.1	Isometrische und unitäre Operatoren	241
3.6.2	Die Campbell-Hausdorff-Formel	244
3.7	Beschreibung physikalischer Symmetrien	246
3.7.1	Das Wignersche Theorem	246
3.7.2	Von einem Parameter abhängende Symmetrietransformationen	250
3.7.3	Aktive und passive Transformationen	252
3.7.4	Verhalten von Observablen unter Symmetrietransformationen	253
3.7.5	Verallgemeinerungen, Liesche Gruppen und Algebren	257
3.8	Folgerungen aus der räumlichen und zeitlichen Translationsinvarianz	261
3.9	Die speziellen Axiome der nicht-relativistischen Quantentheorie	265
3.9.1	Ein-Teilchen-Systeme	265
3.9.2	$N$ -Teilchen-Systeme	267
3.10	Orts- und Impulsdarstellung	273
3.10.1	Ortsdarstellung für einen Freiheitsgrad	273
3.10.2	Impulsdarstellung für einen Freiheitsgrad	278
3.10.3	Zusammenhang zwischen der Orts- und Impulsdarstellung, „Transformationstheorie“	280
3.10.4	Verallgemeinerungen	282
3.10.5	Beispiele von physikalisch wichtigen Operatoren in der Orts- und Impulsdarstellung	283
3.11	Die Zeitabhängigkeit quantenmechanischer Systeme	285
3.11.1	Heisenberg- und Schrödingerbild	286
3.11.2	Die zeitliche Entwicklung von Einteilchen-Systemen	289
3.11.3	Die eindimensionale Bewegung eines Teilchens	291
3.12	Symmetrien und Erhaltungssätze	300
3.13	Nicht abgeschlossene Systeme	308
3.13.1	Das Wechselwirkungsbild	310
3.13.2	Die Dirac-Dyonsche zeitabhängige Störungsrechnung	313
3.13.3	Fermis Goldene Regel	318
3.14	Bewegungsumkehr	324
3.14.1	Bewegungsumkehr in der klassischen Physik	326

3.14.2	Theorie des Bewegungsumkehr-Operators . . . . .	327
3.14.3	Die Mikro-Reversibilität . . . . .	329
3.14.4	Die Phasen der $T$ -Transformation . . . . .	330
3.15	Statistische Gemische und der statistische Operator . . . . .	332
3.16	Beschreibt die Quantenmechanik die atomare Welt vollständig? . . . . .	339
3.16.1	Der Indeterminismus der Quantentheorie . . . . .	341
3.16.2	Das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon . . . . .	346
3.16.3	Die Bellsche Ungleichung und die Unmöglichkeit von lokalen ver- borgenen Variablen . . . . .	349
3.16.4	Deutungen der Quantenmechanik . . . . .	354
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>359</b>
A.1	Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	359
A.2	Eigenschaften der Delta-Funktion . . . . .	360
A.3	Zum Beweis des Fourierschen Umkehrtheorems . . . . .	366
A.4	Gruppengeschwindigkeit . . . . .	367
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>369</b>