

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de MARS 1978

MÉMOIRE N° 55-56

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 55-56, 1978, 334 p.

78/45/455

REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS GROUPES
SYMPLECTIQUES FINIS
(par Jorge SOTO ANDRADE)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75231 PARIS CEDEX 05

Publication trimestrielle

REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS GROUPES

SYMPLECTIQUES FINIS (*)

par Jorge SOTO ANDRADE

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| INTRODUCTION..... | 12 |
| NOTATIONS GENERALES..... | 15 |
| CHAPITRE I. - LES REPRESENTATIONS DE $GL(2, \mathbb{F}_q)$ ET $SL(2, \mathbb{F}_q)$ | 17 |
| § 1. La série principale de $G_0 = GL(2, \mathbb{F}_q)$ | 17 |
| 1. Construction de la série principale par induction..... | 17 |
| 2. La représentation naturelle de G_0 | 21 |
| 3. Isomorphisme entre la représentation naturelle et la série principale..... | 26 |
| § 2. La représentation de Weil (V_Q, ρ_Q) de G_0 | 27 |
| 1. Une présentation de $GL(2, k)$ (k corps commutatif quelconque) | 27 |
| 2. Formes quadratiques et sommes de Gauss sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$ | 29 |
| 3. Définition de la représentation de Weil..... | 34 |
| § 3. La représentation de Weil associée au plan déployé..... | 38 |
| 1. Le groupe $\Gamma = GO(Q)$ | 39 |
| 2. Décomposition de (V_Q, ρ_Q) suivant Γ | 39 |
| 3. Modèles de Weil réduits..... | 41 |
| 4. Isomorphisme entre (V_Q, ρ_Q) et la représentation naturelle | 44 |
| § 4. La représentation de Weil associée au plan non-déployé..... | 45 |
| 1. Le groupe $\Gamma' = GO(N)$ | 45 |
| 2. Décomposition de (V_Q, ρ_Q) suivant Γ' | 46 |
| 3. L'entrelacement des représentations V_Λ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X)$) | 49 |

(*) Thèse Sc. math., Paris-Sud, 1975.

| | |
|---|-----|
| 4. Les modèles de Weil réduits pour la série discrète..... | 53 |
| § 5. Les représentations de $G'_0 = SL(2, k)$ | 54 |
| 1. Préliminaires..... | 54 |
| 2. Restriction de $G''_0 = Z_0 G'_0$ à G'_0 | 61 |
| 3. Restriction de G_0 à G'_0 | 62 |
| 4. Identification des $\alpha' \pi$ ($\alpha' \in \text{Car}(k^X), \pi \in I(G_0)$) | 64 |
| 5. La représentation naturelle de G'_{00} | 65 |
| 6. La représentation de Weil (V'_Q, ρ'_Q) de G'_0 | 67 |
| 7. Restriction de (V_Q, ρ_Q) , de G_0 à G'_0 , pour $Q = xy$.. | 68 |
| 8. La série principale de G'_0 | 70 |
| 9. Restriction de (V_N, ρ_N) à G'_0 | 73 |
| 10. La série discrète de G'_0 | 75 |
| § 6. Compléments sur les représentations de G_0 | 77 |
| 1. Restriction à certain sous-groupes..... | 77 |
| 2. Somme d'une représentation irréductible de G_0 sur les matrices symétriques..... | 79 |
| 3. Vecteurs $SU(2, K)$ - invariants dans la série discrète de $GL(2, K)$ | 82 |
| TABLES..... | 84 |
| CHAPITRE II. - LES REPRESENTATIONS DE $G = \text{GSp}(4, \mathbb{F}_q)$ INDUITES D'UN | |
| SOUS-GROUPE PARABOLIQUE PROPRE..... | |
| § 1. Préliminaires et généralités..... | 88 |
| 1. Les sous-groupes paraboliques de G | 88 |
| 2. La classification des représentations de G | 91 |
| 3. Interprétation en termes de G - fibrations principales..... | 92 |
| § 2. Série de représentations de G associé à P_2 | 95 |
| 1. Définitions et préliminaires..... | 95 |
| 2. L'entrelacement des représentations $M(\bar{\pi}, \chi)$ | 99 |
| 3. Décomposition des représentations $M(\bar{\pi}_\wedge, \chi)$ réductibles..... | 105 |

| | |
|--|-----|
| 4. Description de la série de représentations de G associée à P_2 | 108 |
| § 3. La série principale de G | 109 |
| 1. Décomposition de $M(\overline{\pi}_{\alpha,1}, \gamma)$ | 109 |
| 2. Décomposition de $M(\overline{\pi}_{\alpha_0}^i, \gamma)$ ($i = 1, q$) | 112 |
| 3. Variantes de la construction de la série principale..... | 114 |
| 4. Description géométrique de $M(\overline{\pi}_1^q + \overline{\pi}_1^1, \gamma)$ | 117 |
| 5. Structure de \underline{D} | 119 |
| 6. Décomposition de $(\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$ et $(\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$ | 123 |
| 7. Description de la série principale de G | 127 |
| 8. Dimensions des espaces des vecteurs fixes pour U_2 dans \underline{D} . | 128 |
| § 4. La série de représentations de G associée à P_1 | 129 |
| 1. Définitions et préliminaires..... | 129 |
| 2. L'entrelacement des représentations $V(\alpha, \overline{\pi})$ | 133 |
| 3. Structure de l'algèbre commutante de $V(\alpha, \overline{\pi}_\Lambda)$ (cas réduct.). | 140 |
| 4. Décomposition de $V(1, \overline{\pi}_\Lambda)$ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X) - \text{Car}(k^X)$) | 143 |
| 5. Décomposition de $V(\alpha_0, \overline{\pi}_\Lambda)$ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X)$, $\Lambda^q = \alpha_0 \Lambda$) | 144 |
| 6. Description de la série de représentations de G associée à P_1 | 147 |
| 7. Le non-entrelacement des séries associées à P_1 , P_2 et B . | 147 |
| CHAPITRE III. - LA REPRESENTATION DE WEIL DE $G = \text{GSp}(2n, k)$ | 150 |
| § 1. Une présentation de G | 151 |
| 1. Préliminaires et notations.. .. | 151 |
| 2. Les générateurs de G | 152 |
| 3. Les relations entre les générateurs de G | 156 |
| 4. Etude de $ A^X \cap A^S \cdot A^S ^{-1}$ pour $k = \mathbb{F}_q$ | 158 |
| 5. Réduction aux relations universelles ($k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$) | 162 |
| 6. Le cas $G = \text{GSp}(4, k)$ pour $k = \mathbb{F}_2$ et $k = \mathbb{F}_3$ | 167 |
| § 2. Construction de la représentation de Weil..... | 169 |
| 1. Rappel sur les modules quadratiques sur un anneau involutif... | 169 |

| | |
|---|-----|
| 2. Le A - module quadratique (M, \overline{Q}, B) associé à (E, Q) | 170 |
| 3. Calcul des sommes de Gauss associées à (E, Q) | 174 |
| 4. Définition de la représentation de Weil..... | 177 |
| § 3. Décomposition de la représentation de Weil..... | 179 |
| 1. Les représentations $(W[\overline{\pi}], \rho)$ | 180 |
| 2. Les diagrammes $\underline{S}(\overline{\pi})$ | 185 |
| 3. Troncages..... | 189 |
| 4. Le cas où Γ' est d'indice 2 dans Γ | 190 |
| CHAPITRE IV. - DECOMPOSITION DE LA REPRESENTATION DE WEIL EN RANG 4 | |
| (CAS DEPLOYE)..... | 192 |
| § 1. Structure Γ - équivariante de $\tilde{E} = E^2 \times X$ | 192 |
| 1. Réalisation de (E, Q) et $\Gamma = GO(Q)$ | 192 |
| 2. Les H - orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$ | 194 |
| 3. L'action de la transposition T | 196 |
| § 2. Les représentations $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$ | 197 |
| 1. Définition des représentations $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$ | 197 |
| 2. L'action de la transposition T | 199 |
| 3. Description des espaces $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$ | 202 |
| 4. Description des espaces propres $W^\pm[\overline{\pi}, \overline{\pi}]$ | 206 |
| § 3. Réalisation naturelle de la représentation de Weil..... | 211 |
| 1. Le A - module quadratique (M', \overline{Q}') | 212 |
| 2. La représentation binaturelle de G | 216 |
| 3. Isomorphisme entre la représentation de Weil et la représentation binaturelle..... | 221 |
| § 4. Identification des $(W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2],)$ | 223 |
| 1. Identification des $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$ pour $\overline{\pi}_1$ ou $\overline{\pi}_2$ dans la série principale..... | 223 |
| 2. Le cas où $\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_2$ est dans la série discrète..... | 224 |

| | |
|--|-----|
| 3. Le cas où π_1 et π_2 sont dans la série discrète de G_0 et $\pi_1 \neq \pi_2$ | 226 |
| TABLES..... | 233 |
| CHAPITRE V. - DECOMPOSITION DE LA REPRESENTATION DE WEIL EN RANG 4 | |
| (CAS NON-DEPLOYE)..... | 239 |
| § 1. Les Γ - orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$ | 239 |
| 1. Réalisation de (E, Q) et $\Gamma = GO(Q)$ | 239 |
| 2. Le groupe $U(2, K)$ | 241 |
| 3. Les classes de $U(2, K)$ - conjugaison dans $E^{(2)}$ | 243 |
| 4. Les orbites suivant $U(2, K)$ et $U'(1, K)$ dans $E^{(1)}$ | 246 |
| 5. Les H - orbites dans \tilde{E} | 248 |
| § 2. Description des représentations $W[\pi]$ | 250 |
| 1. Définition des représentations $W[\pi]$ | 250 |
| 2. L'action de la conjugaison F | 252 |
| 3. Description des espaces $W[\pi]$ | 255 |
| 4. Préliminaires à la description des espaces propres $W^\pm[\pi]$... | 259 |
| 5. Le cas $\pi = \pi_\Lambda^1$ | 262 |
| 6. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda, \Phi}$ ($\Lambda = \Lambda^q$, $\Phi = \Phi^q$) | 263 |
| 7. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda^2}^q$ ($\Lambda = \Lambda^q$) | 264 |
| 8. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda, \Lambda^q}$ | 265 |
| 9. Les dimensions des espaces $W[\pi]$ et $W^\pm[\pi]$ | 270 |
| § 3. L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ ($\pi \not\sim \pi \circ F$) | 271 |
| 1. Préliminaires..... | 271 |
| 2. L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ ($\pi \not\sim \pi \circ F$) | 273 |
| 3. L'entrelacement des représentations $W^-[\pi_{\alpha \circ N}^q]$ ($\alpha \in \text{Car}(k^X)$) . | 274 |
| § 4. Identification des $W[\pi]$ n'appartenant pas à la série discrète.. | 276 |
| 1. Identification des représentations $W[\pi_{\Lambda, \Phi}]$ ($\Lambda \neq \Lambda^q \neq \Phi$) | 276 |
| 2. Identification des représentations $W^\pm[\pi_{\Lambda, \Lambda^q}]$ ($\Lambda \neq \Lambda^q$) | 279 |

| | |
|--|-----|
| 3. Identification des représentations $W[\pi_{\Lambda}^i]$ pour $\Lambda^q = \Lambda^*$ et $i = 1, q^2$ | 281 |
| 4. Identification de $W[\pi_{\Lambda, \Phi}^i]$ et $W[\pi_{\Lambda}^i]$ pour $\Lambda = \Lambda^q$; $\Phi = \Phi^q$ et $i = 1, q^2$ | 282 |
| 5. Identification de $W[\pi_{\Lambda}^1]$ ($\Lambda = \Lambda^q$) | 287 |
| § 5. La classification des représentations de G | 289 |
| 1. La série discrète de G associée au tore de Coxeter T_2 | 289 |
| 2. Théorème de complétude..... | 290 |
| 3. Paramétrisation de toutes les représentations de G | 291 |
| TABLES..... | 293 |
| CHAPITRE VI. - LES REPRESENTATIONS DE $G' = Sp(4, k)$ | 301 |
| § 1. Préliminaires..... | 302 |
| 1. Restriction de $G'' = ZG'$ à G' | 302 |
| 2. Restriction de G à G' | 303 |
| 3. Identification des $\alpha\rho$ ($\alpha \in \text{Car}(k^{\times})$, $\rho \in I(G)$) | 304 |
| § 2. Restriction à G' de la série associée à $\xi_{\mathbb{P}}$ | 306 |
| 1. La série de représentations de G' associée à $\xi'_{\mathbb{P}}$ | 307 |
| 2. La série principale de G' | 308 |
| 3. La série de représentations de G' associée à P'_2 | 312 |
| § 3. Restriction à G' de la série associée à $\xi_{\mathbb{L}}$ | 313 |
| 1. La série de représentations de G' associée à $\xi_{\mathbb{L}}$ | 313 |
| 2. La série de représentations de G' associée à P'_1 | 315 |
| § 4. Restriction à G' de la représentation de Weil de G | 318 |
| 1. La représentation de Weil de G' | 318 |
| 2. Remarques sur la paramétrisation des restrictions à G' | 320 |
| 3. La série principale de G' | 321 |
| 4. La série de représentations de G' associée à P'_1 | 323 |
| 5. La série discrète associée au tore $T'_1 = T_1 \cap G'$ | 324 |

| | |
|---|-----|
| 6. La série discrète associée au tore de Coxeter T_2' | 326 |
| 7. La représentation exceptionnelle de G' | 327 |
| TABLE..... | 328 |

- - - - -