

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de MARS 1978

MÉMOIRE N° 55-56

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 55-56, 1978, 334 p.

78/45/455

REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS GROUPES
SYMPLECTIQUES FINIS
(par Jorge SOTO ANDRADE)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75231 PARIS CEDEX 05

Publication trimestrielle

REPRÉSENTATIONS DE CERTAINS GROUPES

SYMPLECTIQUES FINIS (*)

par Jorge SOTO ANDRADE

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	12
NOTATIONS GENERALES.....	15
CHAPITRE I. - LES REPRESENTATIONS DE $GL(2, \mathbb{F}_q)$ ET $SL(2, \mathbb{F}_q)$	17
§ 1. La série principale de $G_o = GL(2, \mathbb{F}_q)$	17
1. Construction de la série principale par induction.....	17
2. La représentation naturelle de G_o	21
3. Isomorphisme entre la représentation naturelle et la série principale.....	26
§ 2. La représentation de Weil (V_Q, ρ_Q) de G_o	27
1. Une présentation de $GL(2, k)$ (k corps commutatif quelconque)	27
2. Formes quadratiques et sommes de Gauss sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$	29
3. Définition de la représentation de Weil.....	34
§ 3. La représentation de Weil associée au plan déployé.....	38
1. Le groupe $\Gamma = GO(Q)$	39
2. Décomposition de (V_Q, ρ_Q) suivant Γ	39
3. Modèles de Weil réduits.....	41
4. Isomorphisme entre (V_Q, ρ_Q) et la représentation naturelle	44
§ 4. La représentation de Weil associée au plan non-déployé.....	45
1. Le groupe $\Gamma' = GO(N)$	45
2. Décomposition de (V_Q, ρ_Q) suivant Γ'	46
3. L'entrelacement des représentations V_Λ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X)$)	49

(*) Thèse Sc. math., Paris-Sud, 1975.

4. Les modèles de Weil réduits pour la série discrète.....	53
§ 5. Les représentations de $G'_0 = SL(2, k)$	54
1. Préliminaires.....	54
2. Restriction de $G''_0 = Z_0 G'_0$ à G'_0	61
3. Restriction de G_0 à G'_0	62
4. Identification des $\alpha' \pi$ ($\alpha' \in \text{Car}(k^X), \pi \in I(G_0)$)	64
5. La représentation naturelle de G'_{00}	65
6. La représentation de Weil (V'_Q, ρ'_Q) de G'_0	67
7. Restriction de (V_Q, ρ_Q) , de G_0 à G'_0 , pour $Q = xy$..	68
8. La série principale de G'_0	70
9. Restriction de (V_N, ρ_N) à G'_0	73
10. La série discrète de G'_0	75
§ 6. Compléments sur les représentations de G_0	77
1. Restriction à certain sous-groupes.....	77
2. Somme d'une représentation irréductible de G_0 sur les matrices symétriques.....	79
3. Vecteurs $SU(2, K)$ - invariants dans la série discrète de $GL(2, K)$	82
TABLES.....	84
CHAPITRE II. - LES REPRESENTATIONS DE $G = \text{GSp}(4, \mathbb{F}_q)$ INDUITES D'UN	
SOUS-GROUPE PARABOLIQUE PROPRE.....	
§ 1. Préliminaires et généralités.....	88
1. Les sous-groupes paraboliques de G	88
2. La classification des représentations de G	91
3. Interprétation en termes de G - fibrations principales.....	92
§ 2. Série de représentations de G associé à P_2	95
1. Définitions et préliminaires.....	95
2. L'entrelacement des représentations $M(\bar{\pi}, \chi)$	99
3. Décomposition des représentations $M(\bar{\pi}_\wedge, \chi)$ réductibles.....	105

4. Description de la série de représentations de G associée à P_2	108
§ 3. La série principale de G	109
1. Décomposition de $M(\overline{\pi}_{\alpha,1}, \gamma)$	109
2. Décomposition de $M(\overline{\pi}_{\alpha_0}^i, \gamma)$ ($i = 1, q$)	112
3. Variantes de la construction de la série principale.....	114
4. Description géométrique de $M(\overline{\pi}_1^q + \overline{\pi}_1^1, \gamma)$	117
5. Structure de \underline{D}	119
6. Décomposition de $(\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$ et $(\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$	123
7. Description de la série principale de G	127
8. Dimensions des espaces des vecteurs fixes pour U_2 dans \underline{D} .	128
§ 4. La série de représentations de G associée à P_1	129
1. Définitions et préliminaires.....	129
2. L'entrelacement des représentations $V(\alpha, \overline{\pi})$	133
3. Structure de l'algèbre commutante de $V(\alpha, \overline{\pi}_\Lambda)$ (cas réduct.).	140
4. Décomposition de $V(1, \overline{\pi}_\Lambda)$ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X) - \text{Car}(k^X)$)	143
5. Décomposition de $V(\alpha_0, \overline{\pi}_\Lambda)$ ($\Lambda \in \text{Car}(K^X)$, $\Lambda^q = \alpha_0 \Lambda$)	144
6. Description de la série de représentations de G associée à P_1	147
7. Le non-entrelacement des séries associées à P_1 , P_2 et B .	147
CHAPITRE III. - LA REPRESENTATION DE WEIL DE $G = \text{GSp}(2n, k)$	150
§ 1. Une présentation de G	151
1. Préliminaires et notations..	151
2. Les générateurs de G	152
3. Les relations entre les générateurs de G	156
4. Etude de $ A^X \cap A^S \cdot A^S ^{-1}$ pour $k = \mathbb{F}_q$	158
5. Réduction aux relations universelles ($k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$)	162
6. Le cas $G = \text{GSp}(4, k)$ pour $k = \mathbb{F}_2$ et $k = \mathbb{F}_3$	167
§ 2. Construction de la représentation de Weil.....	169
1. Rappel sur les modules quadratiques sur un anneau involutif...	169

2. Le A - module quadratique $(M, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{B})$ associé à (E, Q)	170
3. Calcul des sommes de Gauss associées à (E, Q)	174
4. Définition de la représentation de Weil.....	177
§ 3. Décomposition de la représentation de Weil.....	179
1. Les représentations $(W[\overline{\pi}], \rho)$	180
2. Les diagrammes $\underline{S}(\overline{\pi})$	185
3. Troncages.....	189
4. Le cas où Γ' est d'indice 2 dans Γ	190
 CHAPITRE IV. - DECOMPOSITION DE LA REPRESENTATION DE WEIL EN RANG 4	
(CAS DEPLOYE).....	192
§ 1. Structure Γ - équivariante de $\tilde{E} = E^2 \times X$	192
1. Réalisation de (E, Q) et $\Gamma = GO(Q)$	192
2. Les H - orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$	194
3. L'action de la transposition T	196
§ 2. Les représentations $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$	197
1. Définition des représentations $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$	197
2. L'action de la transposition T	199
3. Description des espaces $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$	202
4. Description des espaces propres $W^\pm[\overline{\pi}, \overline{\pi}]$	206
§ 3. Réalisation naturelle de la représentation de Weil.....	211
1. Le A - module quadratique $(M', \overline{\mathbb{Q}}')$	212
2. La représentation binaturelle de G	216
3. Isomorphisme entre la représentation de Weil et la représentation binaturelle.....	221
§ 4. Identification des $(W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2],)$	223
1. Identification des $W[\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2]$ pour $\overline{\pi}_1$ ou $\overline{\pi}_2$ dans la série principale.....	223
2. Le cas où $\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_2$ est dans la série discrète.....	224

3. Le cas où π_1 et π_2 sont dans la série discrète de G_0 et $\pi_1 \neq \pi_2$	226
TABLES.....	233
CHAPITRE V. - DECOMPOSITION DE LA REPRESENTATION DE WEIL EN RANG 4	
(CAS NON-DEPLOYE).....	239
§ 1. Les Γ - orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$	239
1. Réalisation de (E, Q) et $\Gamma = GO(Q)$	239
2. Le groupe $U(2, K)$	241
3. Les classes de $U(2, K)$ - conjugaison dans $E^{(2)}$	243
4. Les orbites suivant $U(2, K)$ et $U'(1, K)$ dans $E^{(1)}$	246
5. Les H - orbites dans \tilde{E}	248
§ 2. Description des représentations $W[\pi]$	250
1. Définition des représentations $W[\pi]$	250
2. L'action de la conjugaison F	252
3. Description des espaces $W[\pi]$	255
4. Préliminaires à la description des espaces propres $W^\pm[\pi]$...	259
5. Le cas $\pi = \pi_\Lambda^1$	262
6. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda, \Phi}$ ($\Lambda = \Lambda^q$, $\Phi = \Phi^q$)	263
7. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda}^{q^2}$ ($\Lambda = \Lambda^q$)	264
8. Le cas $\pi = \pi_{\Lambda, \Lambda^q}$	265
9. Les dimensions des espaces $W[\pi]$ et $W^\pm[\pi]$	270
§ 3. L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ ($\pi \not\sim \pi \circ F$)	271
1. Préliminaires.....	271
2. L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ ($\pi \not\sim \pi \circ F$)	273
3. L'entrelacement des représentations $W^-[\pi_{\alpha \circ N}^q]$ ($\alpha \in \text{Car}(k^X)$) .	274
§ 4. Identification des $W[\pi]$ n'appartenant pas à la série discrète..	276
1. Identification des représentations $W[\pi_{\Lambda, \Phi}]$ ($\Lambda \neq \Lambda^q \neq \Phi$)	276
2. Identification des représentations $W^\pm[\pi_{\Lambda, \Lambda^q}]$ ($\Lambda \neq \Lambda^q$)	279

3. Identification des représentations $W[\pi_{\Lambda}^i]$ pour $\Lambda^q = \Lambda^*$ et $i = 1, q^2$	281
4. Identification de $W[\pi_{\Lambda, \Phi}^i]$ et $W[\pi_{\Lambda}^i]$ pour $\Lambda = \Lambda^q$; $\Phi = \Phi^q$ et $i = 1, q^2$	282
5. Identification de $W[\pi_{\Lambda}^1]$ ($\Lambda = \Lambda^q$)	287
§ 5. La classification des représentations de G	289
1. La série discrète de G associée au tore de Coxeter T_2	289
2. Théorème de complétude.....	290
3. Paramétrisation de toutes les représentations de G	291
TABLES.....	293
CHAPITRE VI. - LES REPRESENTATIONS DE $G' = Sp(4, k)$	301
§ 1. Préliminaires.....	302
1. Restriction de $G'' = ZG'$ à G'	302
2. Restriction de G à G'	303
3. Identification des $\alpha\rho$ ($\alpha \in \text{Car}(k^{\times})$, $\rho \in I(G)$)	304
§ 2. Restriction à G' de la série associée à $\xi_{\mathbb{P}}$	306
1. La série de représentations de G' associée à $\xi'_{\mathbb{P}}$	307
2. La série principale de G'	308
3. La série de représentations de G' associée à P'_2	312
§ 3. Restriction à G' de la série associée à $\xi_{\mathbb{L}}$	313
1. La série de représentations de G' associée à $\xi_{\mathbb{L}}$	313
2. La série de représentations de G' associée à P'_1	315
§ 4. Restriction à G' de la représentation de Weil de G	318
1. La représentation de Weil de G'	318
2. Remarques sur la paramétrisation des restrictions à G'	320
3. La série principale de G'	321
4. La série de représentations de G' associée à P'_1	323
5. La série discrète associée au tore $T'_1 = T_1 \cap G'$	324

6. La série discrète associée au tore de Coxeter T_2'	326
7. La représentation exceptionnelle de G'	327
TABLE.....	328

- - - - -