

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	XXIII
-------------------	-------

1. Grundlagen der Arithmetik und Algebra	1
1.1 Mengenlehre	1
1.1.1 Grundbegriffe und Mengenoperation	1
1.1.2 Abbildungen (Funktionen) von Mengen	3
1.1.3 Direkte Produkte von Mengen	5
1.1.3.1 Direktes Produkt zweier Mengen	5
1.2. Die reellen Zahlen \mathbb{R}	6
1.2.1 Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}	6
1.2.1.1 Menge der natürlichen Zahlen	6
1.2.1.2 Rechenoperationen	6
1.2.1.3 Dezimalsystem	7
1.2.1.4 Dualsystem (Binärsystem)	8
1.2.1.5 p-adische Darstellung	8
1.2.1.6 Primzahlen	9
1.2.1.7 Größter gemeinsamer Teiler	9
1.2.1.8 Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung von ggT (m, n)	9
1.2.1.9 Kleinstes gemeinsames Vielfaches	10
1.2.2 Die ganzen Zahlen \mathbb{Z}	11
1.2.3 Die rationalen Zahlen (Brüche) \mathbb{Q}	11
1.2.4 Das Rechnen mit Brüchen	12
1.2.5 Dezimalbrüche	13
1.2.6 Eigenschaften der rationalen Zahlen	15
1.2.7 Die reellen Zahlen \mathbb{R}	16
1.2.8 Das Rechnen mit reellen Zahlen	18
1.2.9 Ungleichungen	21
1.2.10 Intervalle	24
1.2.10.1 Beschränkte Intervalle	24
1.2.10.2 Nicht beschränkte Intervalle	24
1.2.11 Absolute Beiträge	25
1.2.11.1 Der absolute Betrag	25
1.2.11.2 Abstand zweier Zahlen	25
1.2.11.3 Das Rechnen mit Betragsungleichungen	26
1.2.11.4 Quadratische Ungleichungen	27
1.3 Potenzen und Wurzeln	27
1.3.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	27
1.3.2 Die n-te Wurzel	28
1.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten	30
1.3.4 Potenzen mit irrationalen Exponenten	32
1.3.5 Lösung von Potenzgleichungen	33

1.4	Kombinatorik und binomischer Lehrsatz	34
1.4.1	Fakultäten	34
1.4.2	Binomialkoeffizienten	35
1.4.2.1	Binomialkoeffizienten bei natürlichen Zahlen	35
1.4.2.2	Binomialkoeffizienten bei reellen Zahlen	35
1.4.2.3	Das Pascalsche Dreieck	36
1.4.3	Der binomische Lehrsatz	37
1.4.4	Polynominalkoeffizienten	38
1.4.5	Der Polynomische Lehrsatz	38
1.4.6	Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten)	39
1.4.7	Kombinationen	40
1.4.7.1	Kombinationen ohne Wiederholung	40
1.4.7.2	Kombinationen mit Wiederholung	41
1.4.8	Variationen	41
1.4.8.1	Variationen ohne Wiederholung	41
1.4.8.2	Variationen mit Wiederholung	42
1.5	Logarithmen	43
1.5.1	Allgemeine Logarithmen	43
1.5.2	Dekadische Logarithmen	43
1.5.3	Natürliche Logarithmen	43
1.5.4	Binäre Logarithmen	44
1.5.5	Logarithmengesetze	44
1.5.6	Umrechnungsregel bei verschiedenen Basen	45
1.5.7	Anwendungen	46
1.6	Vollständige Induktion	46
1.7	Elementare Folgen und Reihen; Summen und Mittelwerte	48
1.7.1	Zahlenfolgen und (endliche) Reihen	48
1.7.2	Arithmetische Folgen und Reihen (erster Ordnung)	48
1.7.3	Arithmetische Folgen und Reihen höherer Ordnung	49
1.7.4	Geometrische Folgen und Reihen	51
1.7.5	Spezielle endliche bzw. unendliche Reihen (Summenformeln)	54
1.7.6	Finanzmathematik	55
1.7.6.1	Abschreibungen	55
1.7.6.2	Zinseszins- und Rentenrechnung	56
1.7.7	Mittelwerte	59
1.7.7.1	Arithmetische Mittel	59
1.7.7.2	Geometrisches Mittel	59
1.7.7.3	Harmonisches Mittel	59
1.7.7.4	Anwendungsmöglichkeiten der einzelnen Mittelwerte	60
1.8	Komplexe Zahlen	60
1.8.1	Menge der komplexen Zahlen	60
1.8.2	Gaußsche (komplexen) Zahlenebene	61
1.8.3	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	62
1.8.4	Die Eulersche Formel	63

1.8.5	Die Moivresche Formel	66
1.8.6	Geometrische Konstruktion der Wurzel	67
1.8.7	Komplexe n-te Einheitswurzel	68
1.8.8	Komplexe Lösungen bei quadratischen Gleichungen	69
1.8.9	Fundamentalsatz der Algebra	69
1.9	Gleichungen mit einer Unbekannten	70
1.9.1	Lineare Gleichungen $ax + b = 0$	71
1.9.2	Quadratische Gleichungen (Gleichungen zweiten Grades)	75
1.9.2.1	Elementar lösbare Spezialfälle	75
1.9.2.2	Quadratische Ergänzung – geschlossene Formel	75
1.9.2.3	Zerlegung in Linearfaktoren	76
1.9.2.4	Die Wurzelsätze von Vieta	77
1.9.2.5	Graphische Lösung (und Anwendungen)	77
1.9.3	Kubische Gleichungen (Gleichungen dritten Grades)	80
1.9.3.1	Graphische Lösung	80
1.9.3.2	Elementar lösbare Spezialfälle	81
1.9.3.3	Abspalten eines Linearfaktors bei einer bekannten Lösung	82
1.9.3.4	Die Cardanische Formel	82
1.9.3.5	Die Wurzelsätze von Vieta	86
1.9.3.6	Numerische Bestimmung reeller Lösungen	87
1.9.4	Gleichungen vierten Grades	87
1.9.4.1	Lösbare Spezialfälle	87
1.9.4.2	Abspalten von Linearfaktoren	88
1.9.4.3	Die kubische Resolvente	88
1.9.4.4	Benutzung einer reellen Lösung der kubischen Gleichung	90
1.9.4.5	Numerische Bestimmung reeller Lösungen	91
1.9.4.6	Satz von Vieta	91
1.9.5	Algebraische Gleichungen n-ten Grades – Polynome	91
1.9.5.1	Berechnung der Funktionswerte mit dem Horner-Schema und Polynomdivision	92
1.9.5.2	Wurzeln algebraischer Gleichungen	94
1.9.6	Gleichungen, die sich auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen	96
1.9.6.1	Gleichungen mit gebrochen rationalen Funktionen	96
1.9.6.2	Wurzelgleichungen	97
1.9.6.3	Die Substitutionsmethode	97
1.9.7	Transzendente Gleichungen	97
1.9.7.1	Exponentialgleichungen	99
1.9.7.2	Logarithmische Gleichungen	100
1.9.8	Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen	101
1.9.8.1	Iterationsverfahren bei kontrahierenden Abbildungen	101
1.9.8.2	Regula flasi (lineares Eingabeln)	104
1.9.8.3	Quadratisches Eingabeln	105
1.9.8.4	Das Newton-Verfahren	105

1.10	Interpolationspolynome	106
1.10.1	Allgemeines Polynom durch $n + 1$ Punkte	106
1.10.2	Interpolationspolynom	107
1.10.3	Lagrange-Interpolation	107
1.10.3.1	Formel für beliebige Stützstellen	107
1.10.3.2	Formel für äquidistante Stützstellen	108
1.10.4	Newton-Interpolation (Differenzschema)	109
1.10.4.1	Formel für beliebige Stützstellen	109
1.10.4.2	Formeln für äquidistante Stützstellen	110
1.11	Approximationspolynome	115
1.11.1	Taylorpolynome	115
1.11.2	Interpolationspolynome	115
1.11.3	Approximation durch Bernsteinpolynome	116
1.11.4	Kleinste Quadrat Approximation	116
1.11.5	Approximation im quadratischen Mittel	117
1.11.5.1	Entwicklung nach Legendre-Polynomen	119
1.11.6	Approximation im gewichteten quadratischen Mittel	120
1.11.6.1	Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen	120
2.	Vektorräume und n-dimensionale Zahlenräume	122
2.1	Zwei- und dreidimensionale Zahlenräume	122
2.2	Zwei- und dreidimensionale Euklidische Vektorräume V_2 und V_3	123
2.2.1	Der Begriff des Vektors	123
2.2.2	Komponentenzerlegung	126
2.2.2.1	Zweidimensionale Vektoren	126
2.2.2.2	Dreidimensionale Vektoren	127
2.2.3	Das Rechnen mit Vektoren in Komponentenzerlegung	128
2.2.4	Das Skalarprodukt (inneres Produkt)	130
2.2.5	Das Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	133
2.2.6	Spatprodukt und doppelte Vektorprodukte	137
2.2.7	Linear unabhängige (abhängige) Vektoren-Komponenten- zerlegung	140
2.2.7.1	Vektoren in der Ebene	140
2.2.7.2	Räumliche Vektoren	141
2.3	Der n-dimensionale Zahlenraum \mathbb{R}^n	142
2.4	Der n-dimensionale Euklidische Vektorraum V_n	143
2.5	Allgemeine abstrakte Vektorräume (lineare Räume)	145
2.6	Euklidische Vektorräume	147
3.	Geometrie der Ebene (analytische Geometrie und Planimetrie)	151
3.1	Koordinatensysteme in der Ebene	151
3.1.1	Geradlinige Koordinatensysteme	

3.1.1.1	Schiefwinklige geradlinige Koordinatensysteme	151
3.1.1.2	Kartesisches Koordinatensystem	152
3.1.2	Krummlinige Koordinatensysteme	153
3.1.2.1	Polarkoordinaten	153
3.1.2.2	Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische	155
3.1.3	Transformationen kartesischer Koordinaten	156
3.1.3.1	Parallelverschiebung	157
3.1.3.2	Drehung	157
3.2	Analytische Geometrie der Ebenen und Planimetrie	159
3.2.1	Längen und Winkelberechnung, Streckenteilung und Lote	159
3.2.1.1	Abstand zweier Punkte (Streckenmessung)	159
3.2.1.2	Winkelmessung	160
3.2.1.3	Streckenteilung	161
3.2.1.4	Streckenhalbierung und Mittellot	162
3.2.1.5	Lot auf eine Strecke (Abstand)	163
3.2.1.6	Halbieren eines Winkels	163
3.2.2	Die Gerade	164
3.2.2.1	Die Parameterdarstellung einer Geraden	164
3.2.2.2	Koordinatengleichungen	166
3.2.2.3	Hessesche Normalform – Abstand von einer Geraden	169
3.2.3	Zwei Geraden	173
3.2.3.1	Parallele Geraden	173
3.2.3.2	Schnittpunkt zweier Geraden	175
3.2.3.3	Schnittwinkel zweier Geraden	176
3.2.3.4	Orthogonale Geraden	177
3.2.3.5	Winkelhalbierende	177
3.2.4	Dreiecke	178
3.2.4.1	Allgemeine Dreiecke	178
3.2.4.2	Ähnliche Dreiecke und Strahlensätze	186
3.2.4.3	Rechtwinklige Dreiecke	189
3.2.4.4	Gleichschenklige Dreiecke	191
3.2.4.5	Gleichseitige Dreiecke	192
3.2.4.6	Trigonometrische Funktionen im allgemeinen Dreieck	192
3.2.5	Vierecke	195
3.2.5.1	Das allgemeine Viereck	195
3.2.5.2	Trapez	195
3.2.5.3	Parallelogramm	197
3.2.5.4	Rhombus (Raute)	198
3.2.5.5	Rechteck	198
3.2.5.6	Quadrat	199
3.2.5.7	Sehnenviereck	199
3.2.5.8	Tangentenviereck	200
3.2.6	Regelmäßiges n-Eck	201
3.2.7	Kreis	204
3.2.7.1	Kreisgleichungen	204

3.2.7.2	Kreiseigenschaften	205
3.2.7.3	Kreis durch drei Punkte	206
3.2.7.4	Schnitt vom Kreis und Gerade	207
3.2.7.5	Kreisnormale	208
3.2.7.6	Abstand eines Punktes vom Kreis	209
3.2.7.7	Tangente in einem Punkt auf dem Kreis	210
3.2.7.8	Kreistangente von einem Punkt außerhalb des Kreises aus	210
3.2.7.9	Gemeinsame Tangenten an zwei Kreise	212
3.2.7.10	Schnitt zweier Kreise	214
3.2.7.11	Längen- und Flächenberechnung am Kreis	215
3.2.8	Kegelschnitte	217
3.2.8.1	Ellipse	219
3.2.8.2	Hyperbel	232
3.2.8.3	Parabel	242
3.2.8.4	Polarkoordinaten von Kegelschnitten	249
3.2.9	Kurven zweiter Ordnung	251
4.	Geometrie des Raumes (analytische Geometrie und Stereometrie)	253
4.1	Koordinatensysteme	253
4.1.1	Geradlinige Koordinatensysteme	253
4.1.1.1	Schiefwinklige geradlinige Koordinatensysteme	253
4.1.1.2	Kartesisches Koordinatensystem	254
4.1.2	Krummlinige Koordinatensysteme	255
4.1.2.1	Kugelkoordinaten	255
4.1.2.2	Zylinderkoordinaten	256
4.1.3	Transformationen kartesischer Koordinaten	257
4.1.3.1	Parallelverschiebung	257
4.1.3.2	Drehungen	258
4.2	Analytische Geometrie des Raumes	260
4.2.1	Strecken und Winkel	260
4.2.1.1	Abstand zweier Punkte – Länge einer Strecke	260
4.2.1.2	Winkel zwischen zwei Strecken	261
4.2.1.3	Streckenteilung	261
4.2.2	Die Gerade	262
4.2.2.1	Parameterdarstellung einer Geraden	262
4.2.2.2	Gerade als Schnitt zweier Ebenen	263
4.2.2.3	Richtungswinkel einer Geraden	264
4.2.2.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	265
4.2.2.5	Parallele Geraden	267
4.2.2.6	Abstand zweier windschiefer Geraden	268
4.2.2.7	Schnitt zweier Geraden	270
4.2.3	Die Ebene	270
4.2.3.1	Parameterdarstellung der Ebene	271
4.2.3.2	Koordinatengleichungen der Ebene	272

4.2.3.3	Spezielle Ebenendarstellungen	273
4.2.3.4	Die Hessesche Normalform	275
4.2.3.5	Parallele Ebenen	278
4.2.3.6	Schnitt zweier Ebenen	279
4.2.3.7	Schnitt einer Geraden mit einer Ebene	281
4.2.3.8	Schnitt dreier Ebenen	282
4.3	Flächeninhalt von räumlichen Dreiecken und Parallelogrammen	283
4.4	Volumina und Oberflächen von Körpern (Stereometrie)	284
4.4.1	Polyeder	284
4.4.1.1	Prisma	284
4.4.1.2	Pyramide	287
4.4.1.3	Pyramidenstumpf	288
4.4.1.4	Tetraeder	290
4.4.1.5	Regelmäßige Polyeder	290
4.4.1.6	Keil	292
4.4.1.7	Obelisk	293
4.4.1.8	Prismoid (Prismatoid)	294
4.4.2	Zylinder	295
4.4.2.1	Schiefer Zylinder	295
4.4.2.2	Gerader Zylinder	296
4.4.2.3	Schiefer Kreiszyylinder	296
4.4.2.4	Gerader Kreiszyylinder	297
4.4.3	Kegel	300
4.4.3.1	Kreiskegel	301
4.4.4	Kugel	305
4.4.4.1	Vollkugel	305
4.4.4.2	Kugelausschnitt	306
4.4.4.3	Kugelabschnitt (Kugelsegment oder Kugelkappe)	307
4.4.4.4	Kugelschicht	307
4.5	Flächen zweiter Ordnung	308
4.5.1	Allgemeine Flächen zweiter Ordnung	308
4.5.2	Hauptachsentransformation	309
4.5.2.1	Drehung	309
4.5.2.2	Parallelverschiebung	310
4.5.3	Ellipsoid	310
4.5.4	Einschaliges Hyperboloid	311
4.5.5	Zweischaliges Hyperboloid	313
4.5.6	Elliptischer Kegel	314
4.5.7	Elliptischer Zylinder	315
4.5.8	Hyperbolischer Zylinder	316
4.5.9	Parabolischer Zylinder	317
4.5.10	Elliptisches Paraboloid	318
4.5.11	Hyperbolisches Paraboloid	319
4.5.12	Allgemeine Diskussion der Flächen zweiter Ordnung	320

4.6	Sphärische Trigonometrie (Geometrie der Kugeloberfläche) . . .	322
4.6.1	Groß- und Kleinkreise auf der Kugel	322
4.6.2	Kugelzweieck (Kugelkeil)	323
4.6.3	Kugeldreieck	324
4.6.4	Rechtwinkliges Kugeldreieck	329
4.6.5	Entfernungsberechnung auf der Kugel (Erdoberfläche)	330
4.6.5.1	Grundbegriffe	330
4.6.5.2	Kürzeste Entfernung zweier Orte – orthodrome Entfernung	331
4.6.5.3	Loxodrome	333
5.	(Unendliche) Folgen, Reihen und Produkte	334
5.1	Reelle Zahlenfolgen	334
5.1.1	Grundbegriffe	334
5.1.2	Arithmetische Zahlenfolgen	335
5.1.3	Geometrische Zahlenfolgen	336
5.1.4	Konvergente Zahlenfolgen	336
5.1.5	Divergente Zahlenfolgen	339
5.1.6	Spezielle Grenzwerte	340
5.1.6.1	Geometrische Folgen	340
5.1.6.2	Gebrochen rationale Funktion in n	340
5.1.6.3	Grenzwerte bei stetigen Funktionen	341
5.1.6.4	Wichtige Grenzwerte	341
5.1.7	Grenzwerte von rekursiv definierten Zahlenfolgen	341
5.2	Unendliche Reihen	342
5.2.1	Konvergenz und Divergenz bei unendlichen Reihen	342
5.2.2	Die unendliche geometrische Reihe	345
5.2.3	Das Rechnen mit konvergenten Reihen	346
5.2.4	Alternierende Reihen (Leibniz'sche Reihen)	346
5.2.5	Absolute Konvergenz	347
5.2.6	Konvergenz- und Divergenzkriterien bei Reihen mit nichtnegativen Gliedern	348
5.2.7	Konvergenzkriterien für beliebige Reihen	351
5.2.8	Spezielle Reihen	352
5.2.9	Doppelreihen (Doppelsummen)	355
5.2.10	Multiplikation von Reihen	357
5.3	Unendliche Produkte	359
5.3.1	Konvergenz bei unendlichen Produkten	359
5.3.2	Absolute Konvergenz von unendlichen Produkten	362
6.	Reelle Funktionen einer Variablen	364
6.1	Grundbegriffe	364
6.2	Grenzwerte einer Funktion	369
6.2.1	Allgemeine Grenzwerte	369
6.2.2	Praktische Berechnung von Grenzwerten	372

6.2.3	Grenzwertbestimmung nach der Regel von Bernoulli – L'Hospital (unbestimmte Ausdrücke)	373
6.2.3.1	Die Regel von Bernoulli – L'Hospital	373
6.2.3.2	Behandlung weiterer unbestimmter Ausdrücke	375
6.3	Stetige Funktionen	377
6.3.1	Der Begriff der Stetigkeit	377
6.3.2	Unstetigkeitsstellen	379
6.3.3	Hebbare Unstetigkeiten (Definitions-lücken)	381
6.3.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	383
6.4	Die Ableitung einer Funktion	384
6.4.1	Differenzenquotient	384
6.4.2	Einseitige Ableitungen	385
6.4.3	Die Ableitung an einer bestimmten Stelle	385
6.4.4	Ableitungsfunktion	388
6.4.5	Ableitungsregeln	388
6.4.6	Logarithmische Ableitung	391
6.4.7	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen (Mittelwertsätze)	392
6.4.8	Das Differential einer Funktion	393
6.4.9	Höhere Ableitungen	395
6.4.10	Differentiale höhere Ordnung	397
6.4.11	Ableitungen einer in Parameterdarstellung gegebenen Funktion	398
6.4.12	Ableitungen einer in Polarkoordinaten vorgegebenen Funktion	399
6.4.13	Ableitungen einer impliziten Funktion	401
6.4.14	Taylor-Polynome und Taylor-Reihen	401
6.4.15	Kurvendiskussion	405
6.4.16	Krümmung und Krümmungskreis	412
6.4.17	Die Elastizität einer Funktion	417
6.5	Elementare Funktionen	418
6.5.1	Einteilung der elementaren Funktionen	418
6.5.2	Ganze rationale Funktionen (Polynome)	419
6.5.2.1	Konstante Funktion	419
6.5.2.2	Lineare Funktion	419
6.5.2.3	Quadratische Funktion	419
6.5.2.4	Kubische Parabel	420
6.5.2.5	Polynome n-ten Grades	422
6.5.3	Gebrochene rationale Funktionen	426
6.5.4	Allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$	433
6.5.4.1	Die Potenzfunktionen $y = x^n$; $n \in \mathbb{N}$	433
6.5.4.2	Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$	434
6.5.4.3	Potenzfunktionen mit beliebigen positiven Exponenten	437
6.5.4.4	Potenzfunktionen mit negativen Exponenten	437
6.5.4.5	Eigenschaften der Funktionen $y = x^\alpha$	438

6.6	Exponentialfunktion und logarithmische Funktionen	439
6.6.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	439
6.6.2	Die e-Funktion $y = e^x$ (spezielle Exponentialfunktion)	441
6.6.3	Der natürliche Logarithmus	442
6.6.4	Der allgemeine Logarithmus	445
6.7	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen)	446
6.7.1	Definition der trigonometrischen Funktionen	446
6.7.2	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	449
6.7.2.1	Rückführung auf Winkel zwischen 0 und 90°	449
6.7.2.2	Umrechnungsformel für den gleichen Winkel	450
6.7.3	Additionstheoreme	450
6.7.4	Die allgemeine Sinusfunktion	454
6.7.5	Ableitungen	455
6.8	Zyklometrische Funktionen (Arcusfunktionen)	459
6.8.1	Arcussinus	459
6.8.2	Arcuskosinus	461
6.8.3	Arcustangens	462
6.8.4	Arcuskotangens	464
6.8.5	Beziehungen zwischen zyklometrischen Funktionen	465
6.9	Hyperbolische Funktionen (Hyperbelfunktionen)	468
6.10	Inverse Hyperbelfunktionen (Areafunktionen)	472
6.10.1	Areasinus (Area Sinus hyperbolicus)	472
6.10.2	Areakosinus (Area Cosinus hyperbolicus)	474
6.10.3	Areatangens	475
6.10.4	Areakotangens	477
6.10.5	Beziehungen zwischen den Areafunktionen	478
6.11	Integralrechnung	480
6.11.10.	Das bestimmte Integral	480
6.11.2	Die Integralfunktion	485
6.11.3	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	485
6.11.4	Integrationsregeln	487
6.11.4.1	Partielle Integration	488
6.11.4.2	Substitutionsmethode (Integration durch Substitution)	490
6.11.5	Grundintegrale	494
6.11.6	Klassen integrierbarer Funktionen	495
6.11.6.1	Integration rationaler Funktionen	495
6.11.6.2	Integration spezieller irrationaler Funktionsklassen	498
6.11.7	Integrale, die nicht durch elementare Funktionen darstellbar sind	506
6.11.8	Uneigentliche Integrale	508
6.11.8.1	Uneigentliche Integrale über unendliche Intervalle	509
6.11.8.2	Uneigentliche Integrale nicht beschränkter Funktionen	514
6.11.9	Anwendungen der bestimmten Integrale	517
6.11.9.1	Flächeninhalte ebener Bereiche	517

6.11.9.2	Bogenlänge	521
6.11.9.3	Mantelflächen von Rotationskörpern	523
6.11.9.4	Volumenberechnung aus Querschnittsflächen	527
6.11.9.5	Volumen von Rotationskörpern	529
6.11.9.6	Schwerpunkte und statistische Momente (Momente 1. Ordnung)	532
6.11.9.7	Die Guldnischen Regeln bei homogenen Rotationskörpern	540
6.11.9.8	Trägheitsmomente (Momente 2. Ordnung)	542
6.11.10	Numerische Integration (Quadratur)	549
6.11.10.1	Approximation durch Interpolationspolynome	549
6.11.10.2	Newton-Cotes-Formeln für aquidistante Stützstellen	550
6.11.11	Parameterabhängige Integrale	555
6.11.11.1	Allgemeine parameterabhängige Integrale	555
6.11.11.2	Die Gammafunktion (Eulersches Integral zweiter Gattung)	556
6.11.11.3	Die Betafunktion (Eulersches Integral erster Gattung)	557
6.12	Funktionenfolgen und Funktionenreihen	558
6.12.1	Funktionenfolgen	558
6.12.2	Allgemeine Funktionsreihen	560
6.12.3	Potenzreihen	562
6.12.4	Fourier-Reihen und Fourier-Entwicklung	566
6.12.4.1	Fourier-Reihen	566
6.12.4.2	Fourier-Koeffizienten einer Funktion f	566
6.12.4.3	Fourier-Entwicklung einer Funktion mit der Periode 2π	567
6.12.4.4	Fourier-Entwicklung einer Funktion mit der Periode $2T$	570
6.12.4.5	Fourier-Entwicklung einer Funktion in einem Intervall (a, b)	571
6.12.5	Das Fourier-Integral	572
7.	Funktionen von zwei Variablen	574
7.1	Der Funktionsbegriff	574
7.2	Grenzwert einer Funktion	575
7.3	Stetigkeit	577
7.4	Differentiation	578
7.4.1	Partielle Ableitungen	578
7.4.1.1	Partielle Ableitung erster Ordnung	578
7.4.1.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	580
7.4.2	Totales (vollständiges) Differential und Tangentialebene	581
7.4.3	Vollständige Differenzierbarkeit	582
7.4.4	Richtungsableitung und Gradient	583
7.4.5	Differentiation mittelbarer Funktionen (verallgemeinerte Kettenregel)	586
7.4.6	Auflösbarkeit und Ableitung impliziter Funktionen	587
7.4.7	Zwischenwertsatz	589
7.4.8	Taylorentwicklung	589
7.4.9	Relative Extremwerte und Sattelpunkte	590

7.4.10	Extremwerte unter einer Nebenbedingung	592
4.7.11	Differenzierbarkeit Abbildungen ebener Bereiche	594
7.4.12	Partielle Elastizitäten	598
7.5	Homogene Funktionen	598
7.6	Integralrechnung bei Funktionen zweier Veränderlicher	599
7.6.1	Gebietsintegrale (Flächenintegrale)	599
7.6.2	Zweifache Integrale (Doppelintegrale)	602
7.6.3	Variablentransformation bei Gebietsintegralen	604
7.6.4	Anwendungen von Gebietsintegralen	606
7.6.4.1	Volumenberechnung	606
7.6.4.2	Flächeninhalt eines Gebiets	607
7.6.4.3	Inhalt eines räumlichen Flächenstücks (vgl. 9.5.3)	608
7.6.4.4	Masse und Scherpunkte ebener Gebiete	609
7.6.4.5	Masse und Schwerpunkte eines räumlichen Flächenstücks	610
7.6.4.6	Trägheitsmomente eines ebenen Gebiets	610
7.6.4.7	Trägheitsmomente eines räumlichen Flächenstücks	610
7.6.4.8	Weitere Anwendung von Gebietsintegralen	610
8.	Funktionen mehrerer Veränderlicher	611
8.1	Der Funktionsbegriff	611
8.2	Grenzwert einer Funktion	611
8.3	Stetigkeit	612
8.4	Differentiation	613
8.4.1	Partielle Ableitungen	613
8.4.2	Totales (vollständiges) Differential	614
8.4.3	Vollständige Differenzierbarkeit	615
8.4.4	Richtungsableitung und Gradient	615
8.4.5	Differentiation mittelbarer Funktionen (verallgemeinerte Kettenregel)	616
8.4.6	Differenzierbare Abbildungen	617
8.4.7	Auflösung und Ableitung impliziter Funktionen und Funktionensysteme	618
8.4.8	Mittelwertsatz	619
8.4.9	Taylorentwicklung	619
8.4.10	Relative Extremwerte	620
8.4.11	Extremwerte unter Nebenbedingungen	621
8.5	Homogene Funktionen	622
8.6	Integralrechnung bei Funktionen von drei Veränderlichen	623
8.6.1	Raumintegrale	623
8.6.2	Dreifachintegrale Berechnung der Raumintegrale	624
8.6.3	Variablentransformation bei Dreifachintegralen	625
8.6.4	Anwendungen von Raumintegralen	625
8.6.4.1	Volumenberechnung	625

8.6.4.2	Masse und Schwerpunkt eines Körpers	626
8.6.4.3	Trägheitsmomente eines Körpers	627
8.6.4.4	Massenanziehung	628
9.	Differentialgeometrie und Vektoranalysis	629
9.1	Raumkurven und ebene Kurven	629
9.1.1	Definition einer Raumkurve	629
9.1.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	630
9.1.3	Bogenlänge	632
9.1.4	Tangenteneinheitsvektor	633
9.1.5	Normalebene	634
9.1.6	Schmiegebene	635
9.1.7	Hauptnormale und Krümmung	635
9.1.8	Binormalvektor und rektifizierende Ebene	637
9.1.9	Torsion Windung	637
9.1.10	Frenetsche Formeln	638
9.2	Ebene Kurven	639
9.2.1	Definitionsmöglichkeiten einer ebenen Kurve	639
9.2.2	Ableitungen	639
9.2.3	Tangenten und Normalenvektor	639
9.2.4	Bogenlänge	640
9.2.5	Krümmung	641
9.2.6	Singuläre Punkte	641
9.2.7	Evolute	643
9.2.8	Evolventen	644
9.2.9	Einhüllende (Envelope) einer Kurvenschar	644
9.3	Spezielle ebene Kurven	645
9.3.1	Algebraische Kurven erster und zweiter Ordnung	645
9.3.2	Algebraische Kurven dritter Ordnung	645
9.3.3	Algebraische Kurven vierter Ordnung	648
9.3.4	Zyklische Kurven (Rollkurven)	653
9.3.4.1	Zykloiden	653
9.3.4.2	Epizykloiden	656
9.3.4.3	Hypozykloiden	661
9.3.5	Spirallinien	665
9.3.5.1	Archimedische Spirale	665
9.3.5.2	Hyperbolische Spirale	667
9.3.5.3	Logarithmische Spirale	668
9.3.5.4	Klothoide (Spinnlinie)	669
9.3.6	Kettenlinie	670
9.3.7	Traktix (Schleppkurve)	670
9.4	Zylindrische Schraubenlinie	671
9.5	Flächen	673
9.5.1	Flächengleichung	673

9.5.2	Tangentialebene und Normalvektor	674
9.5.3	Flächeninhalt	676
9.5.4	Bogenelement einer auf der Fläche liegenden Kurve	677
9.5.5	Singuläre Flächenpunkte	678
9.6	Skalare Felder, Vektorfelder, Gradient und Potential	679
9.6.1	In kartesischen Koordinaten	679
9.6.2	Vektorfelder in Zylinderkoordinaten (Polarkoordinaten)	680
9.6.3	Vektorfelder in Kugelkoordinaten	682
9.7	Kurvenintegrale (Linienintegrale)	683
9.7.1	Das Kurvenintegral über ein Skalarfeld (Linienintegral 1. Art)	683
9.7.2	Kurvenintegrale (Linienintegrale) 2. Art in ebenen Vektorfeldern	685
9.7.3	Kurvenintegrale (2. Art) in räumlichen Vektorfeldern	688
9.8	Oberflächenintegrale (Flächenintegrale)	691
9.8.1	Oberflächenintegrale 1. Art	691
9.8.2	Oberflächenintegrale 2. Art in räumlichen Vektorfeldern	692
9.9	Volumenintegrale	694
9.10	Divergenz, Zirkulation und Rotation	695
9.10.1	Divergenz eines Vektorfeldes	695
9.10.2	Zirkulation	696
9.10.3	Rotation eines Vektorfeldes	969
9.11	Integralsätze	697
9.11.1	Der Gaußsche Integralsatz	697
9.11.2	Der Stokessche Integralsatz	697
10.	Lineare Algebra	698
10.1	Vektorräume (lineare Räume)	698
10.2	Matrizen und Determinanten	698
10.2.1	Matrizenoperationen	698
10.2.2	Der Rang einer Matrix	702
10.2.3	Determinanten	703
10.2.4	Inverse Matrix (Kehrmatrix)	706
10.2.5	Orthogonale Matrizen	707
10.3	Lineare Gleichungssysteme	707
10.3.1	Darstellung linearer Gleichungssysteme	707
10.3.2	Lösbarkeitskriterium	708
10.3.3	Lösungsmengen des homogenen und inhomogenen Systems	708
10.3.4	Der Gaußsche Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems	709
10.3.5	Berechnung der inversen Matrix	712
10.3.6	Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der inversen Matrix	713
10.3.7	Cramersche Regel für $m = n$	714

10.4	Lineare Abbildungen (Transformationen) von Vektorräumen . . .	714
10.4.1	Grundbegriffe	715
10.4.2	Matrix einer linearen Abbildung	715
10.4.3	Verknüpfungen von linearen Abbildungen	716
10.4.4	Koordinatentransformationen	717
10.4.4.1	Transformationen bei beliebigen Basen	718
10.4.4.2	Transformationen bei orthonormalen Basen	719
10.4.5	Abbildungen bzgl. verschiedener Basenpaare	720
10.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	721
10.5.1	Definition der Eigenwerte und Eigenvektoren	721
10.5.2	Eigenschaften	722
10.5.3	Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer reeller Matrizen	722
10.5.4	Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen	723
10.5.5	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	724
11.	Lineare Optimierung (Programmierung)	726
11.1	Allgemeine Problemstellung	726
11.2	Geometrische Lösung bei zwei Variablen	726
11.3	Mathematische Formulierung des allgemeinen Problems	728
11.4	Einführung von Schlupfvariablen	729
11.5	Kanonische Form	731
11.6	Simplexverfahren (Simplexalgorithmus)	732
11.6.1	Ausgangstableau aus einer zulässigen kanonischen Form	732
11.6.2	Basisaustauschverfahren für das Problem $z = \text{Min.}$	734
11.6.3	Praktische Durchführung des Simplexverfahrens	735
11.6.4	Beispiele	739
11.6.5	Duales Problem	742
12.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	745
12.1	Begriff der gewöhnlichen Differentialgleichung	745
12.2	Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung	745
12.2.1	Das Richtungsfeld	745
12.2.2	Existenz und Eindeutigkeitsätze	746
12.2.3	Spezielle integrierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung	747
12.2.3.1	Trennung der Veränderlichen	747
12.2.3.2	Die Differentialgleichung $y' = f(ax + by + c)$	748
12.2.3.3	Gleichungen mit homogenen Faktoren Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mit $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$	749
12.2.3.4	Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$	750
12.2.3.5	Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	752
12.2.3.6	Bernoullische Differentialgleichung	755
12.2.3.7	Die Riccatische Differentialgleichung	756

12.2.3.8	Exakte (vollständige) Differentialgleichung	756
12.2.3.9	Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)	758
12.2.4	Singuläre Punkte der expliziten Differentialgleichung $y' = f(x, y)$	761
12.3	Die implizite Differentialgleichung 1. Ordnung $F(x, y, y') = 0$	764
12.3.1	Nach y' auflösbare Gleichungen $y' = f(x, y)$	764
12.3.2	Reguläre und singuläre Linienelemente	765
12.3.3	Nach y auflösbare Gleichungen	766
12.3.3.1	Die Differentialgleichung $y = g(x, y')$	766
12.3.3.2	Die Differentialgleichung $y = g(y')$	767
12.3.3.3	Die Clairautsche Differentialgleichung	768
12.3.3.4	Die d'Alembertsche Differentialgleichung	768
12.3.4	Nach x auflösbare Gleichung $x = g(y, y')$	769
12.4	Systeme expliziter Differentialgleichungen 1. Ordnung	771
12.4.1	Allgemeine Systeme	771
12.4.2	Systeme linearer Differentialgleichungen	772
12.4.2.1	Das homogene lineare System	773
12.4.2.2	Das inhomogene System	774
12.4.2.3	Das Reduktionsverfahren von d'Alembert	774
12.4.2.4	Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	776
12.5	Die explizite Differentialgleichung höherer Ordnung	779
12.5.1	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	779
12.5.2	Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	780
12.5.2.1	Die allgemeine lineare Differentialgleichung	780
12.5.2.2	Die homogene lineare Differentialgleichung	781
12.5.2.3	Die inhomogene lineare Differentialgleichung	781
12.5.2.4	Die Reduktionsmethode von d'Alembert	783
12.5.2.5	Homogene lineare Differentialgleichung mit vorgegebenen Lösungen	784
12.5.2.6	Lösung durch Potenzreihenansatz	785
12.5.3	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	786
12.5.3.1	Die homogene Gleichung	785
12.5.3.2	Die inhomogene Gleichung	787
12.5.4	Die Eulersche Differentialgleichung	790
12.5.5	Spezielle lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	792
12.5.5.1	Die Besselsche Differentialgleichung	792
12.5.5.2	Die Legendresche Differentialgleichung	795
12.5.5.3	Die Laguerresche Differentialgleichung	797
12.5.5.4	Die Hermitesche Differentialgleichung	798
12.5.5.5	Die Tschebyscheffsche Differentialgleichung	798
12.6	Randwertaufgaben	800
12.6.1	Allgemeine Randwertaufgaben	800
12.6.2	Lineare Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung	801

12.6.2.1	Lösungsmöglichkeiten beim allgemeinen Randwertproblem . . .	801
12.6.2.2	Die Greensche Funktion	803
12.6.2.3	Selbstadjungierte Randwertprobleme	807
12.7	Eigenwertaufgaben	810
12.8	Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen .	812
12.8.1	Euler-Cauchyscher Polygonzug	812
12.8.2	Verfahren von Heun	814
12.8.3	Klassisches Runge-Kutta-Verfahren	815
12.8.4	Allgemeiner Ansatz für Runge-Kutta-Verfahren	815
12.8.5	Verfahren der schrittweisen Verbesserung	816
12.8.6	Prädiktor-Korrektur Verfahren	817
	Anhang: Tabellen	819
I.	Ableitungen	819
II.	Unbestimmte Integrale	821
III.	Bestimmte und uneigentliche Integrale	855
	Register	864