

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenrechnen (Arithmetik und Numerik)	1
1.1 Mengen	1
Darstellung von Mengen	1
Mengenoperationen	2
Gesetze der Mengenalgebra	4
Abbildung und Funktion	4
1.2 Zahlensysteme	5
Dekadisches Zahlensystem	5
Weitere Zahlensysteme	6
Darstellung in Rechnern	6
Horner Schema zur Zahlendarstellung	7
1.3 Natürliche Zahlen	7
Vollständige Induktion	8
Vektoren und Felder, Indizierung	8
Rechnen mit natürlichen Zahlen	8
1.4 Ganze Zahlen	10
1.5 Rationale Zahlen (gebrochene Zahlen)	11
Dezimalbrüche	11
Brüche	12
Rechnen mit Brüchen	13
1.6 Rechnen mit Quotienten	13
Proportion	13
Dreisatz	14
Prozent- und Zinsrechnung	14
1.7 Irrationale Zahlen	15
1.8 Reelle Zahlen	15
1.9 Komplexe Zahlen	16
Körper der komplexen Zahlen	16
1.10 Rechnen mit reellen Zahlen	17
Vorzeichen und Absolutbetrag	17
Ordnungsrelationen	18
Intervalle	18
Runden und Abschneiden	19
Rechnen mit Intervallen	19
Klammerung	20
Addition und Subtraktion	21
Summenzeichen	21
Multiplikation und Division	23
Produktzeichen	24
Potenzen und Wurzeln	24
Exponentiation und Logarithmus	26
1.11 Binomischer Satz	28
Binomische Formeln	28
Binomialkoeffizienten	28
Pascalsches Dreieck	28
Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	29
Entwicklung von Potenzen von Summen	30

2	Gleichungen und Ungleichungen (Algebra)	31
2.1	Grundlegende algebraische Begriffe	31
	Nomenklatur	31
	Gruppe	32
	Ring	33
	Körper	33
	Vektorraum	33
	Algebra	34
2.2	Gleichungen mit einer Unbekannten	34
	Elementare Äquivalenzumformungen	34
	Übersicht der verschiedenen Gleichungsarten	35
2.3	Lineare Gleichungen	36
	Gewöhnliche lineare Gleichungen	36
	Lineare Gleichungen in gebrochener Form	36
	Lineare Gleichungen in irrationaler Form	36
2.4	Quadratische Gleichungen	36
	Quadratische Gleichungen in gebrochener Form	37
	Quadratische Gleichungen in irrationaler Form	37
2.5	Kubische Gleichungen	38
2.6	Gleichungen vierten Grades	39
	Allgemeine Gleichung vierten Grades	39
	Biquadratische Gleichungen	39
	Symmetrische Gleichungen vierten Grades	39
2.7	Gleichungen beliebigen Grades	40
	Polynomdivision	40
2.8	Gebrochenrationale Gleichungen	41
2.9	Irrationale Gleichungen	41
	Wurzelgleichungen	41
	Potenzgleichungen	42
2.10	Transzendente Gleichungen	42
	Exponentialgleichungen	42
	Logarithmusgleichungen	43
	Trigonometrische (goniometrische) Gleichungen	43
2.11	Gleichungen mit Beträgen	43
	Gleichung mit einem Betragsausdruck	44
	Gleichungen mit mehreren Betragsausdrücken	45
2.12	Ungleichungen	45
	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	46
2.13	Numerische Lösung von Gleichungen	47
	Grafische Lösung	47
	Intervallschachtelung	47
	Regula falsi	48
	Newton-Verfahren	49
	Sukzessive Approximation	50
3	Geometrie und Trigonometrie der Ebene	52
3.1	Ortslinien	53
3.2	Grundkonstruktionen	53
	Streckenhalbierung	53
	Winkelhalbierung	54
	Senkrechte	54
	Lot	54
	Parallele in gegebenem Abstand	54
	Parallele durch gegebenen Punkt	55
3.3	Winkel	55
	Winkelangabe	55
	Winkelarten	56

	Winkel an Parallelen	57
3.4	Ähnlichkeit und Strahlensätze	57
	Strahlensätze	58
	Streckeneinteilung	58
	Mittelwerte	59
	Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	60
3.5	Dreiecke	60
	Kongruenzsätze	60
	Ähnlichkeit von Dreiecken	61
	Dreieckskonstruktion	61
	Analytische Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks	63
	Analytische Berechnung eines beliebigen Dreiecks	63
	Winkel- und Seitenbeziehungen im Dreieck	65
	Höhe	66
	Winkelhalbierende	66
	Seitenhalbierende	67
	Mittelsenkrechte, Inkreis, Umkreis, Ankreis	67
	Dreiecksfläche	68
	Verallgemeinerter Satz des Pythagoras	68
	Winkelbeziehungen	68
	Sinussatz	69
	Kosinussatz	69
	Tangenssatz	69
	Halbwinkelsätze	69
	Mollweidesche Formeln	70
	Seitensätze	70
	Gleichschenkliges Dreieck	70
	Gleichseitiges Dreieck	71
	Rechtwinkliges Dreieck	72
	Satz des Thales	73
	Satz des Pythagoras	73
	Kathetensatz	73
	Höhensatz	73
3.6	Vierecke	74
	Allgemeines Viereck	74
	Trapez	74
	Parallelogramm	74
	Rhombus (Raute)	75
	Rechteck	75
	Quadrat	76
	Sehnenviereck	76
	Tangentenviereck	77
	Drachenviereck	77
3.7	Regelmäßige n-Ecke (Polygone)	77
	Allgemeines regelmäßiges n -Eck	78
	Bestimmte regelmäßige Vielecke (Polygone)	78
3.8	Kreisförmige Objekte	80
	Kreis	80
	Kreisförmige Flächen	81
	Kreisring	81
	Kreisausschnitt (Kreissektor)	82
	Kreisringsektor	82
	Kreisabschnitt (Kreissegment)	83
	Ellipse	84

4 Geometrie des Raumes	85
4.1 Allgemeine Sätze	85
Satz von Cavalieri	85
Simpsonsche Regel	85
Guldinsche Regeln	85
4.2 Prisma	86
Schiefes Prisma	86
Gerades Prisma	86
Quader (Rechteck)	86
Würfel	87
Schief abgeschnittenes n -seitiges Prisma	87
4.3 Pyramide	87
Tetraeder	88
Pyramidenstumpf	88
4.4 Reguläre Polyeder	88
Eulerscher Polyedersatz	88
Tetraeder	89
Würfel (Hexaeder)	89
Oktaeder	89
Dodekaeder	90
Ikosaeder	90
4.5 Sonstige Körper	91
Prismoid, Prisma	91
Keil	91
Obelisk	91
4.6 Zylinder	91
Allgemeiner Zylinder	92
Gerader Kreiszylinder	92
Schiefabgeschnittener Kreiszylinder	92
Zylinderhuf	92
Hohlzylinder (Rohr)	93
4.7 Kegel	93
Gerader Kreiskegel	93
Gerader Kreiskegelstumpf	94
4.8 Kugel	94
Vollkugel	94
Hohlkugel	95
Kugelausschnitt (Kugelsektor)	95
Kugelabschnitt (Kugelsegment, Kalotte, Kugelkappe)	95
Kugelzone	95
Kugelzweieck	96
4.9 Kugelgeometrie (sphärische Dreiecke)	96
Allgemeines Kugeldreieck	96
Rechtwinkliges Kugeldreieck	97
Schiefwinkliges Kugeldreieck	98
4.10 Rotationskörper	99
Ellipsoid	99
Rotationsparaboloid	99
Rotationshyperboloid	99
Tonne (Faß)	100
Torus (Ring)	100
4.11 Fraktale Geometrie	100
Skaleninvarianz und Selbstähnlichkeit	100
Konstruktion selbstähnlicher Objekte	100
Hausdorff-Dimension	101
Cantor-Menge	101

	Koch-Kurve	101
	Kochsche Schneeflocke	102
	Sierpiński-Dreieck	102
	Box-counting-Algorithmus	102
5	Funktionen	103
5.1	Folgen, Reihen und Funktionen	103
	Folgen und Reihen	103
	Eigenschaften von Folgen, Grenzwerte	104
	Funktionen	105
	Klassifikation von Funktionen	107
	Grenzwert und Stetigkeit	108
5.2	Kurvendiskussion	110
	Definitionsbereich	110
	Symmetrie	110
	Verhalten im Unendlichen	111
	Unstetigkeitsstellen	112
	Nullstellen	112
	Vorzeichenverlauf	113
	Steigungsverlauf, Extrema	113
	Krümmung	114
	Wendepunkt	114
5.3	Steckbrief für Funktionen	116
	Elementare Funktionen	122
5.4	Konstante Funktion	122
5.5	Sprungfunktion	124
5.6	Betragsfunktion	127
5.7	Deltafunktion	130
5.8	Gaußklammer-Funktion, Restfunktion	133
	Ganzrationale Funktionen	137
5.9	Lineare Funktion – Gerade	137
5.10	Quadratische Funktion – Parabel	140
5.11	Kubische Funktion	143
5.12	Potenzfunktion höheren Grades	146
5.13	Polynome höheren Grades	151
5.14	Darstellung von Polynomen und spezielle Polynome	154
	Summen- und Produktdarstellung	154
	Taylorentwicklung	156
	Horner-Schema	156
	Newtonsches Interpolationspolynom	159
	Lagrange-Polynome	160
	Bezier-Polynome und Splines	161
	Spezielle Polynome	164
	Gebrochen rationale Funktionen	167
5.15	Hyperbel	167
5.16	Reziproke quadratische Funktion	170
5.17	Potenzfunktionen mit negativem Exponenten	173
5.18	Quotient zweier Polynome	176
	Polynomdivision und Partialbruchzerlegung	180

Nichrationale algebraische Funktionen	183
5.18 Quadratwurzel	183
5.20 Wurzelfunktionen	186
5.21 Potenzfunktion mit gebrochenem Exponenten	189
5.22 Wurzeln von rationalen Funktionen	193
Kegelschnitte	197
Transzendente Funktionen	200
5.23 Logarithmusfunktion	200
5.24 Exponentialfunktion	205
5.25 Exponentialfunktionen von Potenzen	210
Hyperbolische Funktionen	216
5.26 Hyperbolische Sinus- und Kosinus-funktion	217
5.27 Hyperbolische Tangens- und Kotangens-funktion	224
5.28 Sekans hyperbolicus und Kosekans hyperbolicus	229
Areafunktionen	233
5.29 Area-Sinus hyperbolicus und -Kosinus hyperbolicus	234
5.30 Area-Tangens hyperbolicus und -Kotangens hyperbolicus	236
5.31 Area-Sekans hyperbolicus und -Kosekans hyperbolicus	239
Trigonometrische Funktionen	243
5.32 Sinus- und Kosinusfunktion	247
Überlagerung von Schwingungen	256
Periodische Funktionen	261
5.33 Tangens und Kotangens	263
5.34 Sekans und Kosekans	269
Arkusfunktionen	274
5.35 Arkussinus und Arkuskosinus	275
5.36 Arkustangens und Arkuskotangens	278
5.37 Arkusekans und Arkuskosekans	281
Ebene Kurven	285
5.38 Algebraische Kurven n-ter Ordnung	285
Kurven zweiter Ordnung	285
Kurven dritter Ordnung	286
Kurven vierter und höherer Ordnung	288
5.39 Rollkurven	289
5.40 Spiralen	291
5.41 Andere Kurven	293
6 Vektorrechnung	294
6.1 Vektoralgebra	294
Vektor und Skalar	294
Spezielle Vektoren	294
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	295
Vektoraddition	296
Vektorsubtraktion	296
Rechengesetze	296
Lineare (Un-) Abhängigkeit von Vektoren	297
Basis	298
6.2 Skalarprodukt oder inneres Produkt	301
Rechenregeln	301
Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes	302
Schmidtsches Orthonormierungsverfahren	304

	Richtungskosinus	304
	Anwendung der Vektorrechnung: Hyperwürfel	305
6.3	Vektorprodukt zweier Vektoren	305
	Eigenschaften des Vektorproduktes	307
6.4	Mehrfachprodukte von Vektoren	307
	Spatprodukt	307
7	Koordinatensysteme	310
7.1	Koordinatensysteme in zwei Dimensionen	310
	Kartesische Koordinaten	310
	Polarkoordinaten	310
	Umrechnungen zwischen 2D Koordinatensystemen	311
7.2	2D Koordinatentransformation	311
	Parallelverschiebung (Translation)	311
	Drehung (Rotation)	313
	Spiegelung (Reflexion)	313
	Skalierung	314
7.3	Koordinatensysteme in drei Dimensionen	314
	Kartesische Koordinaten	314
	Zylinderkoordinaten	314
	Kugelkoordinaten	315
	Umrechnungen zwischen dreidimensionalen Koordinatensystemen	315
7.4	Koordinatentransformation in drei Dimensionen	316
	Parallelverschiebung (Translation)	316
	Drehung (Rotation)	317
7.5	Anwendung in der Computergrafik	318
7.6	Transformationen	318
	Objektdarstellung und Objektbeschreibung	318
	Homogene Koordinaten	320
	2-D-Translation mit homogenen Koordinaten	320
	2-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	320
	3-D-Translation mit homogenen Koordinaten	321
	3-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	322
	3-D-Rotation von Punkten mit homogenen Koordinaten	322
	Positionierung eines Objektes im Raum	323
	Rotation von Objekten um eine beliebige Achse im Raum	325
	Simulation von Bewegungsabläufen	326
	Spiegelungen	327
	Transformation von Koordinatensystemen	327
	Translation eines Koordinatensystems	327
	Rotation eines Koordinatensystems um eine Hauptachse	328
7.7	Projektionen	330
	Grundprinzipien	330
	Parallelprojektion	330
	Zentralprojektion	333
	Allgemeine Formulierung von Projektionen	335
7.8	Window-Viewport-Transformationen	337
8	Analytische Geometrie	338
8.1	Elemente der Ebene	338
	Abstand zweier Punkte	338
	Teilung einer Strecke	338
	Fläche eines Dreiecks	338
	Gleichung einer Kurve	339
8.2	Gerade	339
	Gleichungsformen der Geraden	339
	Hessesche Normalform	340

	Schnittpunkt von Geraden	341
	Winkel zwischen Geraden	341
	Parallele und senkrechte Geraden	342
8.3	Kreis	342
	Kreisgleichungen	342
	Kreis und Gerade	343
	Kreistangentengleichung	343
8.4	Ellipse	343
	Gleichungsformen der Ellipse	344
	Brennpunkteigenschaften der Ellipse	344
	Durchmesser der Ellipse	344
	Tangente und Normale der Ellipse	345
	Krümmung der Ellipse	345
	Ellipsenflächen und Ellipsenumfang	345
8.5	Parabel	346
	Gleichungsformen der Parabel	346
	Brennpunkteigenschaften der Parabel	347
	Parabeldurchmesser	347
	Tangente und Normale der Parabel	347
	Krümmung einer Parabel	347
	Parabelflächen und Parabelbogenlänge	347
	Parabel und Gerade	348
8.6	Hyperbel	348
	Gleichungsformen der Hyperbel	348
	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	349
	Tangente und Normale der Hyperbel	350
	Konjugierte Hyperbeln und Durchmesser	350
	Krümmung einer Hyperbel	350
	Flächen einer Hyperbel	350
	Hyperbel und Gerade	351
8.7	Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte	351
	Form der Kegelschnitte	351
	Hauptachsentransformation	352
	Geometrische Konstruktion (Kegelschnitt)	352
	Leitlinieneigenschaft	352
	Polargleichung	353
8.8	Elemente im Raum	353
	Abstand zweier Punkte	353
	Teilung einer Strecke	353
	Rauminhalt eines Tetraeders	353
8.9	Geraden im Raum	354
	Parameterdarstellung einer Geraden	354
	Schnittpunkt zweier Geraden	354
	Schnittwinkel zweier sich schneidenden Geraden	354
	Abstand zwischen Punkt und Gerade	355
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade)	355
	Abstand zweier Geraden	355
8.10	Ebenen im Raum	356
	Parameterdarstellung der Ebene	356
	Koordinatendarstellung der Ebene	356
	Hessesche Normalenform der Ebene	357
	Umformungen	357
	Abstand Punkt - Ebene	357
	Schnittpunkt Gerade - Ebene	357
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen	358
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade)	358

	Spiegelung	358
	Abstand zweier paralleler Ebenen	359
	Schnittmenge zweier Ebenen	359
8.11	Flächen zweiter Ordnung in Normalform	359
	Ellipsoid	359
	Hyperboloid	360
	Kegel	360
	Paraboloid	361
	Zylinder	361
8.12	Allgemeine Fläche zweiter Ordnung	362
	Allgemeine Gleichung	362
	Hauptachsentransformation	362
	Gestalt einer Fläche zweiter Ordnung	363
9	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	365
9.1	Matrizen	365
	Zeilen- und Spaltenvektoren	367
9.2	Spezielle Matrizen	368
	Transponierte, konjugierte und adjungierte Matrizen	368
	Quadratische Matrizen	368
	Dreiecksmatrizen	369
	Diagonalmatrizen	371
9.3	Operationen mit Matrizen	374
	Addition und Subtraktion von Matrizen	374
	Multiplikation einer Matrix mit skalarem Faktor c	375
	Multiplikation von Vektoren, Skalarprodukt	376
	Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	377
	Multiplikation von Matrizen	378
	Rechenregeln der Matrixmultiplikation	379
	Multiplikation mit einer Diagonalmatrix	380
	Matrizenmultiplikation mit dem Falk-Schema	380
	Zeilensummen- und Spaltensummenproben	382
9.4	Determinanten	383
	Zweireihige Determinanten	383
	Allgemeine Rechenregeln für Determinanten	383
	Determinantenwert Null	385
	Dreireihige Determinanten	386
	Determinanten höherer (n -ter) Ordnung	389
	Berechnung n -reihiger Determinanten	390
	Reguläre und inverse Matrix	391
	Berechnung der inversen Matrix mit Determinanten	392
	Rang einer Matrix	393
	Bestimmung des Ranges mit Unterdeterminanten	394
9.5	Lineare Gleichungssysteme	394
	Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten	396
9.6	Numerische Lösungsverfahren	397
	Gaußscher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme	397
	Vorwärtselemination	398
	Pivotisierung	399
	Rückwärtseinsetzen	400
	LR-Zerlegung	401
	Lösbarkeit von $(m \times n)$ -Gleichungssystemen	404
	Gauß-Jordan-Verfahren zur Matrixinversion	405
	Berechnung der inversen Matrix A^{-1}	408
9.7	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	410
	Gesamtschritt-Verfahren (Jacobi)	411
	Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel)	412

	Konvergenzkriterien für iterative Verfahren	413
	Speicherung der Koeffizientenmatrix	414
9.8	Tabelle der Lösungsmethoden	415
9.9	Eigenwertgleichungen	416
9.10	Tensoren	418
10	Differentialrechnung	420
10.1	Einführung, Definition	420
	Ableitung einer Funktion	420
	Differential	421
	Differenzierbarkeit	421
10.2	Differentiationsregeln	422
	Ableitungen elementarer Funktionen	422
	Ableitungen trigonometrischer Funktionen	423
	Ableitungen hyperbolischer Funktionen	423
	Konstantenregel	423
	Faktorregel	423
	Potenzregel	423
	Summenregel	424
	Produktregel	424
	Quotientenregel	424
	Kettenregel	424
	Logarithmische Ableitung von Funktionen	425
	Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	425
	Ableitung von Funktionen in Polarkoordinaten	426
	Ableitung einer impliziten Funktion	426
	Ableitung der Umkehrfunktion	426
	Tabelle der Differentiationsregeln	427
10.3	Mittelwertsätze	428
	Satz von Rolle	428
	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	428
	Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	429
10.4	Höhere Ableitungen	429
	Steigungsverlauf, Extrema	430
	Krümmung	432
	Wendepunkt	432
10.5	Näherungsverfahren zur Differentiation	433
	Grafische Differentiation	433
	Numerische Differentiation	433
10.6	Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	434
	Partielle Ableitung	434
	Totales Differential	435
	Extrema von Funktionen in zwei Dimensionen	436
	Extrema mit Nebenbedingungen	436
10.7	Anwendung der Differentialrechnung	437
	Berechnung unbestimmter Ausdrücke	437
	Kurvendiskussion	438
	Extremalaufgaben	439
	Fehlerrechnung	440
	Nullstellensuche nach Newton	441
11	Differentialgeometrie	442
11.1	Ebene Kurven	442
	Darstellung von Kurven	442
	Ableitung in expliziter Darstellung	442
	Ableitung in Parameterdarstellung	442
	Ableitung in Polarkoordinaten	442

	Bogenelement einer Kurve	443
	Tangente, Normale	443
	Krümmung einer Kurve	444
	Evoluten und Evolventen	445
	Wendepunkte, Scheitel	446
	Singuläre Punkte	446
	Asymptoten	447
	Einhüllende einer Kurvenschar	447
11.2	Raumkurven	448
	Darstellung von Raumkurven	448
	Begleitendes Dreiein	448
	Krümmung	450
	Windung (Torsion) einer Kurve	450
	Frenetsche Formeln	451
11.3	Flächen	451
	Darstellung einer Fläche	451
	Tangentialebene und Flächennormale	452
	Singuläre Flächenpunkte	453
12	Unendliche Reihen	454
12.1	Reihen	454
12.2	Konvergenzkriterien	454
12.3	Taylor- und MacLaurin-Reihen	457
	Formel von Taylor	457
	Taylor-Reihe	458
12.4	Potenzreihen	459
	Konvergenzbetrachtungen für Potenzreihen	459
	Eigenschaften konvergenter Potenzreihen	460
	Umkehrung von Potenzreihen	461
12.5	Spezielle Potenzreihenentwicklungen	462
	Binomische Reihen	462
	Spezielle Binomische Reihen	462
	Reihen von Exponentialfunktionen	462
	Reihen von logarithmischen Funktionen	463
	Reihen von trigonometrischen Funktionen	464
	Reihen von Arkusfunktionen	464
	Reihen von Hyperbelfunktionen	465
	Reihen von Areafunktionen	465
	Partialbruchentwicklungen	465
	Unendliche Produkte	466
13	Integralrechnung	467
13.1	Integralbegriff und Integrierbarkeit	467
	Stammfunktion	467
	Unbestimmtes und bestimmtes Integral	467
	Geometrische Deutung	468
	Regeln zur Integrierbarkeit	469
	Uneigentliche Integrale	470
13.2	Integrationsregeln	472
	Regeln für unbestimmte Integrale	472
	Regeln für bestimmte Integrale	472
	Tabelle der Integrationsregeln	473
	Integrale einiger elementarer Funktionen	473
13.3	Integrationsverfahren	474
	Integration durch Substitution	475
	Partielle Integration	478
	Integration durch Partialbruchzerlegung	479

	Integration durch Reihenentwicklung	482
13.4	Numerische Integration	483
	Rechteckregel	484
	Trapezregel	484
	Simpson-Regel	484
	Romberg-Integration	485
	Gauß-Quadratur	487
	Tabelle der numerischen Integrationsverfahren	488
13.5	Mittelwertsatz der Integralrechnung	489
13.6	Linien-, Flächen- und Volumenintegrale	490
	Bogenlänge (Rektifikation)	490
	Flächeninhalt	490
	Rotationskörper (Drehkörper)	492
13.7	Funktionen in Parameterdarstellung	493
	Bogenlänge in Parameterdarstellung	493
	Sektorenformel	493
	Rotationskörper in Parameterdarstellung	493
13.8	Mehrfachintegrale und ihre Anwendungen	494
	Definition von Mehrfachintegralen	494
	Flächenberechnung	495
	Schwerpunkt von Bögen	495
	Trägheitsmoment von Bögen	496
	Schwerpunkt einer Fläche	496
	Trägheitsmoment von Flächen	497
	Schwerpunkt von Drehkörpern	497
	Trägheitsmoment von Drehkörpern	497
13.9	Technische Anwendung der Integralrechnung	498
	Statisches Moment, Schwerpunkt	498
	Trägheitsmoment	499
	Statik	501
	Arbeitsberechnungen	502
	Mittelwerte	502
14	Vektoranalysis	504
14.1	Felder	504
	Symmetrien in Feldern	505
14.2	Differentiation und Integration von Vektoren	507
	Skalenfaktoren in allgemeinen orthogonalen Koordinaten	508
	Differentialoperatoren	509
14.3	Gradient und Potential	510
14.4	Richtungsableitung und Vektorgradient	512
14.5	Divergenz und Gaußscher Integralsatz	513
14.6	Rotation und Stokesscher Integralsatz	516
14.7	Laplace-Operator und Greensche Formeln	518
14.8	Kombinationen von div, rot und grad, Berechnung von Feldern	520
	Zusammenfassung	522
15	Komplexe Variablen und Funktionen	523
15.1	Komplexe Zahlen	523
	Imaginäre Zahlen	523
	Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	523
	Kartesische Darstellung komplexer Zahlen	524
	Konjugiert komplexe Zahlen	524
	Betrag einer komplexen Zahl	525
	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	526
	Exponentialdarstellung komplexer Zahlen	526
	Umrechnung zwischen kartesischer und trigonometrischer Darstellung	527

	Riemannsche Zahlenkugel	528
15.2	Elementare Rechenoperationen mit komplexen Zahlen	529
	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	529
	Multiplikation und Division komplexer Zahlen	529
	Potenzieren im Komplexen	532
	Radizieren im Komplexen	533
15.3	Elementare Funktionen einer komplexen Variablen	534
	Folgen im Komplexen	534
	Reihen im Komplexen	536
	Exponentialfunktion im Komplexen	537
	Natürlicher Logarithmus im Komplexen	537
	Allgemeine Potenz im Komplexen	538
	Trigonometrische Funktionen im Komplexen	538
	Hyperbelfunktionen im Komplexen	539
	Inverse trigonometrische, inverse hyperbolische Funktionen im Komplexen	541
15.4	Anwendungen der komplexen Rechnung	541
	Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene	541
	Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz	543
	Ortskurven	543
	Inversion von Ortskurven	544
15.5	Ableitung von Funktionen einer komplexen Variablen	546
	Definition der Ableitung im Komplexen	546
	Ableitungsregeln im Komplexen	546
	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	547
	Konforme Abbildungen	547
15.6	Integration in der komplexen Ebene	549
	Komplexe Kurvenintegrale	549
	Cauchyscher Integralsatz	550
	Stammfunktionen im Komplexen	551
	Cauchysche Integralformeln	551
	Taylorreihe einer analytischen Funktion	552
	Laurentreihen	553
	Klassifikation singulärer Punkte	553
	Residuensatz	554
	Inverse Laplacetransformation	554
16	Differentialgleichungen	556
16.1	Allgemeines	556
16.2	Geometrische Interpretation	557
16.3	Lösungsmethoden	559
	Trennung der Variablen	559
	Substitution	559
	Exakte Differentialgleichung	560
	Integrierender Faktor	560
16.4	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	561
	Variation der Konstanten	561
	Allgemeine Lösung	562
	Bestimmung einer partikulären Lösung	562
	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .	562
16.5	Einige spezielle Gleichungen	563
	Bernoullische Differentialgleichung	563
	Riccatische Differentialgleichung	563
16.6	Differentialgleichungen 2. Ordnung	563
	Einfache Spezialfälle	563
16.7	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	565
	Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	565
	Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	566

Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	566
16.8 Differentialgleichungen n-ter Ordnung	569
16.9 Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen 1.Ordnung	574
16.10 Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen	575
16.11 Partielle Differentialgleichungen	577
Lösung durch Separation	578
16.12 Numerische Integration von Differentialgleichungen	581
Euler-Verfahren	581
Verfahren von Heun	582
Modifiziertes Euler-Verfahren	583
Runge-Kutta-Verfahren	584
Runge-Kutta-Verfahren für Systeme von Differentialgleichungen	587
Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen	588
Finite Elemente	590
 17 Fourier-Transformation	 594
17.1 Fourier-Reihen	594
Einleitung	594
Definition und Koeffizienten	594
Konvergenzbedingung	596
Erweitertes Intervall	597
Symmetrien	598
Fourier-Reihe in komplexer und spektraler Darstellung	600
Formeln zur Berechnung von Fourier-Reihen	601
Fourier-Entwicklung einfacher periodischer Funktionen	602
Fourier-Reihen (Tabelle)	606
17.2 Fourier-Integrale	607
Einleitung	607
Definition und Koeffizienten	607
Konvergenzbedingungen	609
Komplexe Darstellung, Fouriersinus- und -kosinustransformation	609
Symmetrien	611
Faltung und einige Rechenregeln	611
17.3 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	612
Definition und Koeffizienten	612
Shannonsches Abtasttheorem	614
Diskrete Sinus- und Kosinustransformation	614
Fast-Fourier-Transformation (FFT)	615
Spezielle Paare von Fourier-Transformierten	621
Fourier-Transformierte (Tabelle)	621
Spezielle Fourier-Sinus-Transformierte	622
Spezielle Fourier-Kosinus-Transformierte	623
 18 Laplacetransformation	 625
18.1 Einleitung	625
18.2 Definition der Laplacetransformation	625
18.3 Rechenregeln	627
18.4 Partialbruchzerlegung	635
Partialbruchzerlegung mit einfachen reellen Nullstellen	635
Partialbruchzerlegung mit mehrfachen reellen Nullstellen	636
Partialbruchzerlegung mit komplexen Nullstellen	637
18.5 Lineare Differentialgleichungen	638
Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	638
Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	640
Lineare Differentialgleichungen: Beispiele	642
Laplace-Transformierte (Tabelle)	646

19 Empirische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	656
19.1 Beschreibung von Messungen	656
Fehlerarten	658
19.2 Kenngrößen zur Beschreibung von Meßwertverteilungen	659
Lageparameter, Mittelwerte von Meßreihen	659
Streuungsparameter	661
19.3 Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen	662
Häufigkeitsverteilungen	662
Wahrscheinlichkeitsverteilungen	664
Maßzahlen und Momente	665
Diskrete Verteilungen	667
Stetige Verteilungen	669
Verteilung von Stichprobenfunktionen	674
19.4 Stichproben-Analyseverfahren (Test- und Schätztheorie)	677
Schätzverfahren	678
Konstruktionsprinzipien für Schätzfunktionen	680
Momentenmethode	680
Maximum-Likelihood-Verfahren	681
Methode der kleinsten Quadrate	681
χ^2 -Minimum-Methode	682
Methode der Quantile, Perzentile	682
Intervallschätzung	683
Intervallgrenzen bei Normalverteilung	684
Intervallgrenzen bei Binomial- und hypergeometrischer Verteilung	686
Intervallgrenzen bei Poisson-Verteilung	686
Bestimmung des Stichprobenumfangs n	687
Prüfverfahren	687
Parametertests	690
Parametertests bei der Normalverteilung	691
Hypothesen über den Mittelwert beliebiger Verteilungen	693
Hypothesen über p von Binomial- und hypergeometrischen Verteilungen	693
Anpassungstests	693
Anwendung: Annahmestichproben- und Ausschußprüfung	695
19.5 Zuverlässigkeit	696
19.6 Korrelation von Meßwerten	698
19.7 Ausgleichsrechnung, Regression	699
Lineare Regression und die Methode der kleinsten Quadrate	701
Regression n -ter Ordnung	703
19.8 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	703
Diskrete und stetige Ereignismengen	703
Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	704
Grundbegriffe der Kombinatorik	705
Abhängige und unabhängige Zufallsgrößen	706
Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	707
20 Boolesche Algebra	710
20.1 Motivation und Grundbegriffe	710
Aussagen und Wahrheitswerte	710
Aussagenvariablen	710
20.2 Boolesche Verknüpfungen	711
Negation, nicht, not	711
Konjunktion, und, and	711
Disjunktion, (inklusive) oder, or	712
Rechenregeln	712
20.3 Boolesche Funktionen	714
Verknüpfungsbasis	714
20.4 Normalformen	715

	Disjunktive Normalform	715
	Konjunktive Normalform	715
	Darstellung von Funktionen durch Normalformen	716
20.5	Karnaugh-Veitch-Diagramme	718
	Erstellen eines KV-Diagrammes	718
	Eintragen einer Funktion in ein KV-Diagramm	718
	Minimierung mit Hilfe von KV-Diagrammen	719
20.6	Minimierung nach Quine und McCluskey	720
20.7	Mehrwertige Logik und Unschärfe (Fuzzy) Logik	723
	Mehrwertige Logik	723
	Fuzzy Logik	723
21	Kurze Einführung in PASCAL	726
21.1	Grundstruktur	726
21.2	Variablen und Typen	726
	Ganze Zahlen	727
	Reelle Zahlen	727
	Boolesche Werte	727
	Felder, ARRAYS	728
	Zeichen und Zeichenketten	729
	RECORDs	729
	Zeiger	730
	Selbstdefinierte Typen	731
21.3	Anweisungen	732
	Zuweisungen und Ausdrücke	732
	Ein- und Ausgabe	733
	Verbundanweisung	734
	Bedingte Anweisungen IF und CASE	735
	Schleifen FOR, WHILE und REPEAT	736
21.4	Prozeduren und Funktionen	737
	Prozeduren	737
	Funktionen	738
	Lokale und globale Variablen, Parameterübergabe	738
21.5	Rekursion	740
21.6	Grundlegende Algorithmen	741
	Dynamische Datenstrukturen	741
	Suchen	743
	Sortieren	743
21.7	Computergrafik	745
	Grundfunktionen	745
22	Integraltafeln	747
22.1	Integrale rationaler Funktionen	747
	Integrale mit $P_x = ax + b$	747
	Integrale mit x^m/P_x^n	747
	Integrale mit $1/(x^n P_x^m)$	748
	Integrale mit $ax + b$ und $fx + g$	749
	Integrale mit $a + x$ und $b + x$	749
	Integrale mit $ax^2 + bx + c$	750
	Integrale mit x^n/P_x^m	750
	Integrale mit $1/x^n P_x^m$	751
	Integrale mit $P_x = a^2 \pm x^2$	751
	Integrale mit $1/P_x^n$	751
	Integrale mit x^n/P_x^m	751
	Integrale mit $1/(x^n P_x^m)$	752
	Integrale mit $P_x = a^3 \pm x^3$	753
	Integrale mit $a^4 + x^4$	754

	Integrale mit $a^4 - x^4$	754
22.2	Integrale irrationaler Funktionen	754
	Integrale mit $x^{1/2}$ und $P_x = ax + b$	754
	Integrale mit $P_x^{1/2} = (ax + b)^{1/2}$	755
	Integrale mit $P_x^{1/2} = (ax + b)^{1/2}$ und $Q_x^{1/2} = (cx + d)^{1/2}$	756
	Integrale mit $R_x = (a^2 + x^2)^{1/2}$	757
	Integrale mit $S_x = (x^2 - a^2)^{1/2}$	758
	Integrale mit $T_x = (a^2 - x^2)^{1/2}$	759
22.3	Integrale transzendenter Funktionen	761
	Integrale mit Exponentialfunktionen	761
	Integrale mit logarithmischen Funktionen	762
	Integrale mit Hyperbelfunktionen	763
	Integrale mit inversen Hyperbelfunktionen	764
	Integrale mit Sinus- oder Kosinusfunktionen	764
	Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktionen	768
	Integrale mit Tangens- oder Kotangensfunktionen	772
	Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen	772
22.4	Bestimmte Integrale	774
	Bestimmte Integrale mit algebraischen Funktionen	774
	Bestimmte Integrale mit Exponentialfunktionen	774
	Bestimmte Integrale mit logarithmischen Funktionen	775
	Bestimmte Integrale mit trigonometrischen Funktionen	776