

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen zur statistischen Beschreibung von Vorgängen	
1	Einleitung	3
	Leitfaden für den Leser	6
2	Verteilungen und Erwartungswerte bei einer Zufallsvariablen . .	12
2.1	Ereignisse und Zufallsvariablen	12
2.2	Wahrscheinlichkeit und Verteilungsfunktion	14
2.3	Zusammenhänge zwischen Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichtefunktionen	16
2.3.1	Kontinuierliche Zufallsvariablen	16
2.3.2	Diskrete Zufallsvariablen	18
3	Physikalische Beispiele für Verteilungsdichten	21
3.1	Vorbemerkung	21
3.2	Der Boltzmann-Faktor und die Maxwell'sche Verteilungsdichte .	22
3.3	Die spektrale Intensitätsdichte der schwarzen Strahlung	24
3.4	Die Schrödinger-Gleichung der Wellenmechanik	25
3.5	Die Poissonsche Verteilungsdichte	28
3.6	Die Gleichverteilungsdichte	29
3.7	Die Gaußsche Verteilungsdichte	31
4	Verteilungen und Erwartungswerte bei zwei Zufallsvariablen . .	33
4.1	Ereignisse, Verteilungen und Verteilungsdichten	33
4.2	Erwartungswerte bei zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen . . .	34
4.3	Die Gaußsche Verbundverteilungsdichte	36
4.4	Wahrscheinlichkeit und Entropie	38
4.5	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und ihre Verteilungen	40
4.6	Einige Ergebnisse für n Zufallsvariablen Der zentrale Grenzwertsatz	45

5	Stochastische Prozesse	47
5.1	Grundlegende Definitionen	47
5.2	Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen	48
5.2.1	Definition der Autokorrelationsfunktion als Erwartungswert . .	49
5.2.2	Definition der Kreuzkorrelationsfunktion als Erwartungswert . .	49
5.3	Stationäre Prozesse	49
5.4	Ergodische Prozesse	51
5.5	Allgemeine Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion	53
5.6	Allgemeine Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion	56
5.7	Die spektrale Leistungsdichte eines ergodischen Prozesses	58
5.8	Kreuzleistungsdichtespektren ergodischer Prozesse	62
5.9	Weißes Geräusch als entartetes stochastisches Eingangssignal . .	64
6	Schätzung von Kennwerten statistischer Vorgänge	66
6.1	Schätzfunktion für den linearen Mittelwert	66
6.2	Kriterien zur Beurteilung von Schätzungen	67
6.2.1	Erwartungstreue	67
6.2.2	Konsistenz	68
6.3	Schätzung der Varianz von Abtastwerten	70
6.3.1	Nicht korrelierte Abtastwerte	70
6.3.2	Korrelierte Abtastwerte	70
6.4	Optimale Verknüpfung von zwei Zufallsvariablen	71
6.5	Kontinuierliche Schätzfunktionen	73
6.5.1	Schätzung des linearen Mittelwertes	73
6.5.2	Schätzung des quadratischen Mittelwertes	75
7	Vektorielle Zufallsprozesse	77
7.1	Grundlegende Definitionen	77
7.2	Lineare Transformationen für Gaußsche Zufallsvektoren	78
7.3	Bedingte Gauß-Verteilungsdichtefunktionen	79
7.4	Bedingte Kenngrößen zu einer linearen Transformation	81
7.5	Zusammenhänge für instationäre Prozesse	82

II Stochastische Signale in linearen Systemen

8	Einige Grundlagen aus der allgemeinen Systemtheorie	87
8.1	Die Zustandsdifferentialgleichung und ihre Lösung	93
8.1.1	Die Fundamentalmatrix	93
8.1.2	Das Superpositionsintegral	95
8.1.3	Lösung der Zustandsgleichung durch Laplace-Transformation . .	96
8.2	Adjungierte Systeme	96

8.3	Grundstrukturen der Zustandsdarstellung	98
8.3.1	Die Regelungsnormform	99
8.3.2	Die Beobachtungsnormform	100
8.3.3	Die Jordansche Normalform	104
8.4	Beschreibung zeitdiskreter Systeme	107
9	Zusammenhänge zwischen den Kennfunktionen stochastischer Eingangs- und Ausgangssignale	110
9.1	Die Zustandsgleichungen bei stochastischer Erregung	110
9.2	Stochastische Differentialgleichungen und Integrale	111
9.3	Zusammenhang zwischen den Kovarianzmatrizen V_z und V_x	113
9.4	Die Kreuzkovarianzmatrizen V_{zx} und V_{xz}	115
9.4.1	Instationäres weißes Eingangsrauschen	116
9.4.2	Verknüpfung der Kreuzkovarianzmatrizen	117
9.5	Zusammenhang zwischen V_x und V_{zx}	118
9.6	Zusammenhänge zwischen den skalaren Korrelationsfunktionen	119
9.6.1	Zusammenhang zwischen den Autokorrelationsfunktionen	120
9.6.2	Die Kreuzkorrelationsfunktionen Φ_{zy} und Φ_{yz}	122
9.7	Systemanalyse mit Breitbandrauschen	122
9.8	Der Zusammenhang zwischen Φ_y und Φ_{zy}	124
9.9	Differentialgleichungen für Korrelationsfunktionen	125
10	Zusammenhänge zwischen den spektralen Kennfunktionen	127
10.1	Der Zusammenhang zwischen den Spektralmatrizen $S_z(\omega)$ und $S_x(\omega)$	127
10.2	Die Kreuzspektralmatrizen S_{zx} und S_{xz}	128
10.3	Die Zusammenhänge zwischen den skalaren Leistungsdichtespektren	129
10.3.1	Die Wirkleistungsspektren S_z und S_y	130
10.3.2	Die Kreuzleistungsspektren S_{zy} und S_{yz}	130
10.3.3	Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Leistungsdichtespektren bei zwei Systemen	131
10.4	Auswertung von Integralen mit Hilfe der Residuenrechnung	132
10.5	Berechnung der Kennfunktionen für ein schwingungsfähiges System 2. Ordnung	136
10.6	Berechnung der Kennfunktionen für ein differenzierendes System 2. Ordnung	137
10.7	Allgemeine Formeln zur Berechnung der Ausgangsleistung	141
10.8	Beispiele zur Berechnung der Ausgangsleistung	142
11	Modellierung von Geräuschen durch Formfilter	146
11.1	Die Produktdarstellung von Wirkleistungsspektren	146
11.2	Allgemeine Eigenschaften der Zerlegungsfunktionen	147

11.3	Ein gleichwertiges Verfahren	149
11.4	Beispiele für Geräuschmodellierungen	151
11.4.1	Tiefpaßgeräusch	151
11.4.2	Turbulenzspektrum	152
11.4.3	Formfilter mit konjugiert komplexen Polen	154
11.5	Geräuschmodellierung und Zustandsdarstellung	155
11.6	Ergänzende Zusammenhänge	157
12	Dynamische Entwicklung statistischer Kennfunktionen in linearen Systemen	160
12.1	Vorbemerkung	160
12.2	Die Entwicklungsgleichung für den linearen Mittelwert	161
12.3	Die Entwicklungsgleichung für die Kovarianz	163
12.4	Erweiterung des Zustandsvektors	166
13	Markov-Prozesse, statistische Modellierung und Ausbreitungsvorgänge	168
13.1	Vorbemerkungen	168
13.2	Definition des Markov-Prozesses	170
13.3	Wahrscheinlichkeitsbegriffe zu den Ausbreitungsgleichungen	171
13.4	Allgemeine Eigenschaften der Verteilungen von Markov-Prozessen	173
13.5	Vektorielle Verallgemeinerung	174
13.6	Die Gleichung von Smoluchowski	176
13.7	Die Fokker-Planck-Gleichung	178
13.8	Wichtige Sonderfälle	181
13.9	Zusammenhang zwischen der Fokker-Planck-Gleichung und der Langevin-Gleichung	182
13.10	Statistische Kennfunktionen aus der Langevin-Gleichung	183
13.11	Eine Gaußsche Verteilungsdichtefunktion als Fundamentallösung der Fokker-Planck-Gleichung	185
13.12	Verallgemeinerung der Fokker-Planck-Gleichung	187
13.13	Die Master-Gleichung	190
14	Rückblick auf die historische Entwicklung und Überleitung zu neueren Fragestellungen	193
14.1	Dynamische und thermische Systeme	194
14.2	Reversible und irreversible Teilvorgänge	195
14.3	Der Einfluß von Fluktuationen	198
14.4	Zur Auswirkung statistischer Anfangsbedingungen	199
14.5	Bemerkungen zum Zeitbegriff und zum II. Hauptsatz	201
14.6	Analytische Formulierung des Zusammenhangs zwischen Dynamik und Statistik	202
14.7	Komplexe Systeme	204

III Kalman-Filter

15	Schätzungen mit minimaler mittlerer quadratischer Abweichung	211
15.1	Vorbereitende Hinweise	211
15.2	Allgemeiner Ansatz einer beliebigen Schätzfunktion	212
15.3	Erwartungstreue lineare Schätzung vektorieller Größen mit minimalem mittlerem Fehlerquadrat	214
15.3.1	Das Optimierungskriterium	214
15.3.2	Berechnung der optimalen Matrix H_0	215
16	Optimale Filterung von verrauschten Signalen	217
16.1	Herleitung der skalaren Wiener-Hopfschen Integralgleichung	217
16.2	Lösung der Integralgleichung	218
16.3	Beispiel mit einem Nutzsignalspektrum 1. Ordnung	219
16.4	Eine Alternativvorschrift zur Berechnung des optimalen Filterfrequenzgangs	222
16.5	Zusammenfassung und Ausblick	224
17	Die Gleichungen für den Kalman-Filterentwurf	226
17.1	Voraussetzungen	226
17.2	Vorbemerkungen zum Entwurfsverfahren	227
17.3	Eine kompakte Herleitung der Entwurfsgleichungen	228
17.3.1	Die Filter-Differentialgleichung	228
17.3.2	Die Entwicklungsgleichung der Fehlerkovarianz	231
17.3.3	Bestimmung der optimalen Korrekturmatrix	231
17.3.4	Aufstellung der Riccati-Gleichung	233
17.4	Die Differentialgleichung des Schätzfehlers	235
17.5	Stabilität, stochastische Steuerbarkeit und stochastische Beobachtbarkeit	236
17.6	Korrelation zwischen Eingangsruschen und Meßrauschen	239
17.7	Beispiel eines Systems mit zeitabhängiger Ausgangsmatrix	239
18	Kalman-Filter für zeitinvariante Grundsysteme und stationäre Geräusche	243
18.1	Die modifizierten Entwurfsgleichungen	243
18.2	Zusammenhänge mit dem Wiener-Filter	246
18.3	Die Entwurfsgleichungen für ein skalares System 1. Ordnung	248
18.4	Hinweise zur Bedeutung der Anfangsbedingungen	251
18.5	Beispiel für ein Grundsystem 1. Ordnung	254

18.6	Analog-Realisierung eines Kalman-Filters für ein Grundsystem	
	1. Ordnung	257
18.7	Skalarer Sonderfall: Grundsystem ohne Ausgleich	261
18.8	Beispiel für eine Korrelation zwischen Eingangsrauschen und Meßrauschen	262
19	Einige Eigenschaften der Riccati-Gleichung	265
19.1	Vorbemerkung zu den Lösungen	266
19.2	Das Hamiltonsche Gleichungssystem	266
19.3	Beispiel zum Hamilton-System	268
19.4	Die Differentialgleichung für die inverse Fehlerkovarianzmatrix	269
20	Verfahren zur Signalvorhersage	272
20.1	Einige Vorüberlegungen zur Prediktion	272
20.2	Prediktion nach Wiener	274
20.3	Der optimale Vorhersagewert als bedingter Erwartungswert	276
20.4	Prediktion nach Kalman	279
21	Die Filterentwurfsgleichungen für ein allgemeines Grundsystem	
	2. Ordnung	281
21.1	Die Entwurfsgleichungen in Komponentenform	281
21.2	Ein Beispiel	283
21.3	Lineare Transformation des Zustandsvektors	286
21.4	Die Filterentwurfsgleichungen für Grundsysteme 2. Ordnung in Beobachtungsnormalform	287
21.5	Filter mit dem Modell eines schwingungsfähigen Grundsystems zweiter Ordnung in Analog-Realisierung	290
22	Anwendungsorientierte Beispiele	297
22.1	Kalman-Beobachter für eine zustandsgeregelte Strecke zweiter Ordnung	297
22.2	Winkelschätzung für die Regelung einer Kreiselplattform	300
22.2.1	Der Kreisel mit zwei Freiheitsgraden	301
22.2.2	Formulierung des Filterproblems	304
22.3	Filterentwurf bei linearisierten Zustandsgleichungen	308
22.3.1	Herkömmliche Linearisierung durch Taylor-Entwicklung	308
22.3.2	Statistische Linearisierung	312
22.4	Entwurfsgleichungen bei gefiltertem Meßrauschen	314
22.4.1	Zurückführung auf weiße Geräusche	314
22.4.2	Die modifizierten Entwurfsgleichungen	316
22.4.3	Beispiel für ein P-T ₁ -Meßrauschen	319

23	Entwurf von Kalman-Filtern reduzierter Ordnung	322
23.1	Problemstellung	322
23.2	Ansatz für den reduzierten Beobachter	323
23.3	Die Differentialgleichung des Beobachtungsfehlers	326
23.4	Ansatz der Riccati-Gleichung zum reduzierten Kalman-Filter	327
23.5	Bestimmung der optimalen Matrix K_0	328
23.6	Bestimmung der optimalen Matrix P_{2_0}	329
23.7	Zusammenstellung der Entwicklungsgleichungen	332
23.8	Beispiel für den Entwurf eines reduzierten Kalman-Filters	334
23.9	Beispiel für den Entwurf eines reduzierten Beobachters für ein Grundsystem 3. Ordnung	338
23.10	Regelkreis mit reduziertem Beobachter, Separationsprinzip	341
23.10.1	Kennzeichnung der Zustandsregelung	341
23.10.2	Kennzeichnung des Beobachters	342
23.10.3	Herleitung des Separationsprinzips	343
24	Entwurf des stationären Kalman-Filters im Frequenzbereich	345
24.1	Vorbemerkung	345
24.2	Beschreibung von Systemen und Einheitsbeobachtern im Frequenzbereich	347
24.3	Entwurf des reduzierten deterministischen Beobachters im Zeitbereich	351
24.4	Entwurf des reduzierten deterministischen Beobachters im Frequenzbereich	357
24.5	Frequenzbereichsentwurf des stationären reduzierten Kalman-Filters	361
24.6	Berechnung der Zeitbereichslösung aus der Frequenzbereichslösung	365
24.7	Ein Beispiel zum Frequenzbereichsentwurf	366
25	Zeitdiskret arbeitendes Kalman-Filter	370
25.1	Kennzeichnung diskreter Systeme und Signale	370
25.2	Formulierung des Filterproblems	371
25.3	Die Lösungsschritte	372
25.4	Zusammenstellung der Ergebnisse	374
25.5	Beispiel für den Entwurf eines diskreten Kalman-Filters	374
25.6	Experimentelle Ergebnisse einer digital realisierten Kalman-Filterung	376
26	Zeitdiskretes Kalman-Filter reduzierter Ordnung	379
26.1	Filtergleichung und Kovarianzentwicklungsgleichung	379
26.2	Bestimmung der optimalen Matrizen K_0 und P_{2_0}	380

26.3	Frequenzbereichsentwurf des reduzierten diskreten Kalman-Filters	382
26.4	Umwandlung der Riccati-Gleichung	383
26.5	Lösung der Polynommatrixgleichung	385
	Epilog: Dynamik und Statistik	387
-	Anhang	390
	Literaturverzeichnis	399
	Sachverzeichnis	403