Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

0 Einleitung 1

1 Die Inversion am Kreis bzw. an der Kugel 9
1.1 Grundlegende Eigenschaften . . . 9
1.2 Stereographische Projektion . . . 16
1.3 Das Übertragungsprinzip . . . 18
1.4 Kreisverwandtschaften . . . 22
1.5 Möbiustransformationen . . . 26
Aufgaben . . . 31

2 Axiomatik der euklidischen Geometrie 35
2.1 Die Bedeutung von Euklids Axiomatik . . . 35
Anhang. Die „natürliche Geometrie“ von Hjelmslev . . . 41
2.2 Das Parallelenaxiom . . . 43
Anhang. Der Beweis des Parallelenaxioms nach Lorenzen . . . 55
2.3 Die moderne Sicht der Axiomatik . . . 57
Anhang 1. Andere Axiomensysteme für den euklidischen Raum . . 68
Anhang 2. Das arithmetische Modell . . . 72
Aufgaben . . . 74

3 Grundlagen der projektiven Geometrie 77
3.1 Das Einbeziehen des Unendlichen in die Geometrie . . . 77
3.2 Axiomatik der projektiven Geometrie . . . 85
3.2.1 Der projektive Raum . . . 85
A) Inzidenzaxiome . . . 85
Anhang. Die Gültigkeit der Aussagen 1^d bis 9^d . . . 95
B) Die weiteren Axiome . . . 97
3.2.2 Die projektive Ebene . . . 109
A) Axiomatik . . . 109
B) Koordinaten . . . 119
3.3 Projektivitäten . . . 139
3.3.1 Eindimensionale Projektivitäten . . . 140
A) Involutionen . . . 150
3.3.2 Zweidimensionale Projektivitäten . . . 153
A) Kollineationen . . . 155
B) Korrelationen . . . 159
Anhang 1. Das arithmetische Modell für $\mathbb{P}_2$ . . . 161

Anhang 2. Projektive Dreiecke 165
Aufgaben 167

4 Kurven 2. Grades **171**
4.1 Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse 171
4.2 Pol und Polare 181
4.3 Analytische Beschreibungen 184
4.4 Kurven 2. Grades 189
Anhang. Kurven n-ter Ordnung bzw. Klasse mit $n \geq 2$ 195
4.5 Imaginärtheorie 200
4.5.1 Der algebraische Zugang 201
4.5.2 Der geometrische Zugang 203
4.5.3 Die Pfeildarstellung komplexer Punkte 213
Anhang 1. Wegkurven 226
Anhang 2. Zur außermathematischen Bedeutung der projektiven Geometrie 234
Aufgaben 241

5 Ableitung spezieller Geometrien **245**
5.1 Die euklidische Geometrie 245
5.2 Allgemeine Beschreibung der Cayley–Klein-Geometrien 250
5.3 Distanz- und Winkelmessung 255
5.3.1 Allgemeine Betrachtungen 255
5.3.2 Formeln für Distanz und Winkel 267
Anhang. Komplexe Zahlen als Koordinaten 273
Aufgaben 275

6 Ebene Cayley–Klein-Geometrien **277**
6.1 Hyperbolische Geometrie 277
6.1.1 Gültigkeit der Axiome 277
6.1.2 Modelle 283
6.1.3 Distanz- und Winkelmessung 288
6.1.4 Ausgewählte Ergebnisse 296
6.1.5 Der Sehraum 300
6.2 Elliptische Geometrie 303
6.2.1 Modelle 303
6.2.2 Distanz- und Winkelmessung 307
6.3 Pseudoeuklidische Geometrie 310
6.3.1 Grundlagen 310
6.3.2 Elementare Resultate 314
A) Bewegungen 314
B) Distanz und Winkel 315
C) Dreiecke 321
6.3.3 Pseudoeuklidische Geometrie und Relativitätstheorie 323

6.3.4 Das Hyperboloidmodell der hyperbolischen Ebene 330
6.3.5 Pseudokomplexe Zahlen als Koordinaten 333
6.4 Doppelt-hyperbolische Geometrie 334
6.4.1 Grundlagen 334
6.4.2 Das Hyperboloidmodell der doppelt-hyperbolischen Ebene . 339
6.5 Dualhyperbolische Geometrie 341
6.6 Galileigeometrie 344
6.6.1 Allgemeines 344
6.6.2 Distanz, Winkel und Bewegungen 347
6.6.3 Duale Zahlen als Koordinaten 349
6.7 Duale Geometrien 350
6.7.1 Dualhyperbolische Geometrie 353
6.7.2 Duale pseudoeuklidische Geometrie 354
6.7.3 Dualeuklidische Geometrie 360
Anhang. Zur Bedeutung der dualeuklidischen Geometrie . . 365
6.8 Koordinatisierung der Cayley–Klein-Ebenen 368
6.9 Ausblick. Räumliche Cayley–Klein-Geometrien 375
Aufgaben 388

Anmerkungen **393**

Literaturverzeichnis **405**

Stichwortverzeichnis **415**