

Norbert Kusolitsch

Maß- und
Wahrscheinlichkeitstheorie

Eine Einführung

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Ein Beispiel	1
2	Mengen und Mengensysteme	5
2.1	Elementare Mengenlehre	5
2.2	Algebren und σ -Algebren	10
2.3	Semiringe, Ringe und σ -Ringe	13
2.4	Erzeugte Systeme	19
2.5	Monotone Systeme und Dynkin-Systeme	22
3	Mengenfunktionen	27
3.1	Inhalte und Maße auf Semiringen	27
3.2	Die Fortsetzung von Inhalten und Maßen auf Ringe	30
3.3	Eigenschaften von Inhalten und Maßen	32
3.4	Additionstheorem und verwandte Sätze	35
4	Fortsetzung von Maßen auf σ-Algebren	41
4.1	Äußere Maße und Carathéodory-Messbarkeit	41
4.2	Fortsetzungs- und Eindeutigkeitsatz	43
4.3	Vervollständigung	46
5	Unabhängigkeit	51
5.1	Die durch ein Ereignis bedingte Wahrscheinlichkeit	51
5.2	Unabhängigkeit von Ereignissystemen	53
6	Lebesgue-Stieltjes-Maße	57
6.1	Definition und Regularität	57
6.2	Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R}	59
6.3	Das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}	61
6.4	Diskrete und stetige Verteilungsfunktionen	63
6.5	Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf \mathbb{R}	66

6.6	Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R}^k	69
6.7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_k)$	76
6.8	Das k -dimensionale Lebesgue-Maß	81
7	Messbare Funktionen - Zufallsvariable	87
7.1	Definition und Eigenschaften	87
7.2	Erweitert reellwertige Funktionen	90
7.3	Treppenfunktionen	92
7.4	Baire-Funktionen	94
7.5	Subsigmaalgebren	95
7.6	Unabhängige Zufallsvariable	99
7.7	Verallgemeinertes Null-Eins-Gesetz von Kolmogoroff	101
7.8	Cantor-Menge und nichtmessbare Mengen	103
7.9	Konvergenzarten	105
8	Die Verteilung einer Zufallsvariablen	113
8.1	Das induzierte Maß	113
8.2	Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen	114
8.3	Die inverse Verteilungsfunktion	117
8.4	Maßtreue Abbildungen	122
9	Das Integral - Der Erwartungswert	129
9.1	Definition des Integrals	129
9.2	Konvergenzsätze	135
9.3	Das unbestimmte Integral	142
9.4	Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgues-Integral	145
9.5	Das Integral transformierter Funktionen	149
10	Produktträume	159
10.1	Die Produktsigmaalgebra	159
10.2	Der Satz von Fubini	163
10.3	Maße auf unendlich-dimensionalen Produktträumen	176
10.4	Null-Eins-Gesetz von Hewitt- Savage	182
10.5	Stetige Zufallsvariable	184
10.6	Die Faltung	187
11	Zerlegung und Integraldarstellung signierter Maße	195
11.1	Die Hahn-Jordan-Zerlegung	195
11.2	Die Lebesgue-Zerlegung	198
11.3	Der Satz von Radon-Nikodym	199
12	Integral und Ableitung	203
12.1	Funktionen von beschränkter Variation	203
12.2	Absolut stetige Funktionen	205
12.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	210

13	L_p- Räume	215
	13.1 Integralgleichungen	215
	13.2 Vollständigkeit der L_p -Räume	219
	13.3 Gleichmäßige Integrierbarkeit	223
	13.4 Der Dualraum zu $L_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$	226
14	Bedingte Erwartungen	231
	14.1 Der Satz von der vollständigen Erwartung	231
	14.2 Die durch eine σ -Algebra bedingte Erwartung	234
	14.3 Reguläre, bedingte Wahrscheinlichkeiten	242
15	Gesetze der großen Zahlen	249
	15.1 Die Varianz und andere Momente	249
	15.2 Schwache Gesetze der großen Zahlen	254
	15.3 Starke Gesetze der großen Zahlen	256
	15.4 Ergodensätze	264
16	Martingale	271
	16.1 Definition und grundlegende Eigenschaften	271
	16.2 Transformation von Submartingalen	277
	16.3 Konvergenzsätze für Submartingale	282
17	Verteilungskonvergenz und Grenzwertsätze	289
	17.1 Schwache Konvergenz	289
	17.2 Der klassische zentrale Grenzverteilungssatz	293
	17.3 Schwache Kompaktheit	296
	17.4 Charakteristische Funktionen	299
	17.5 Der Grenzverteilungssatz von Lindeberg-Feller	309
A	Anhang	317
	A.1 Das Diagonalisierungsverfahren	317
	A.2 Das Auswahlaxiom	318
	A.3 Reihen	318
	A.4 Topologie	323
	A.5 Analysis	328
	A.6 Konvexe Mengen und Funktionen	329
	A.7 Eindeutigkeit der Exponentialfunktion	333
	A.8 Trigonometrie	334
	A.9 Komplexe Analysis	336
	A.10 Funktionalanalysis	339
	A.11 Drehung	341
	Literaturverzeichnis	343
	Stichwortverzeichnis	345